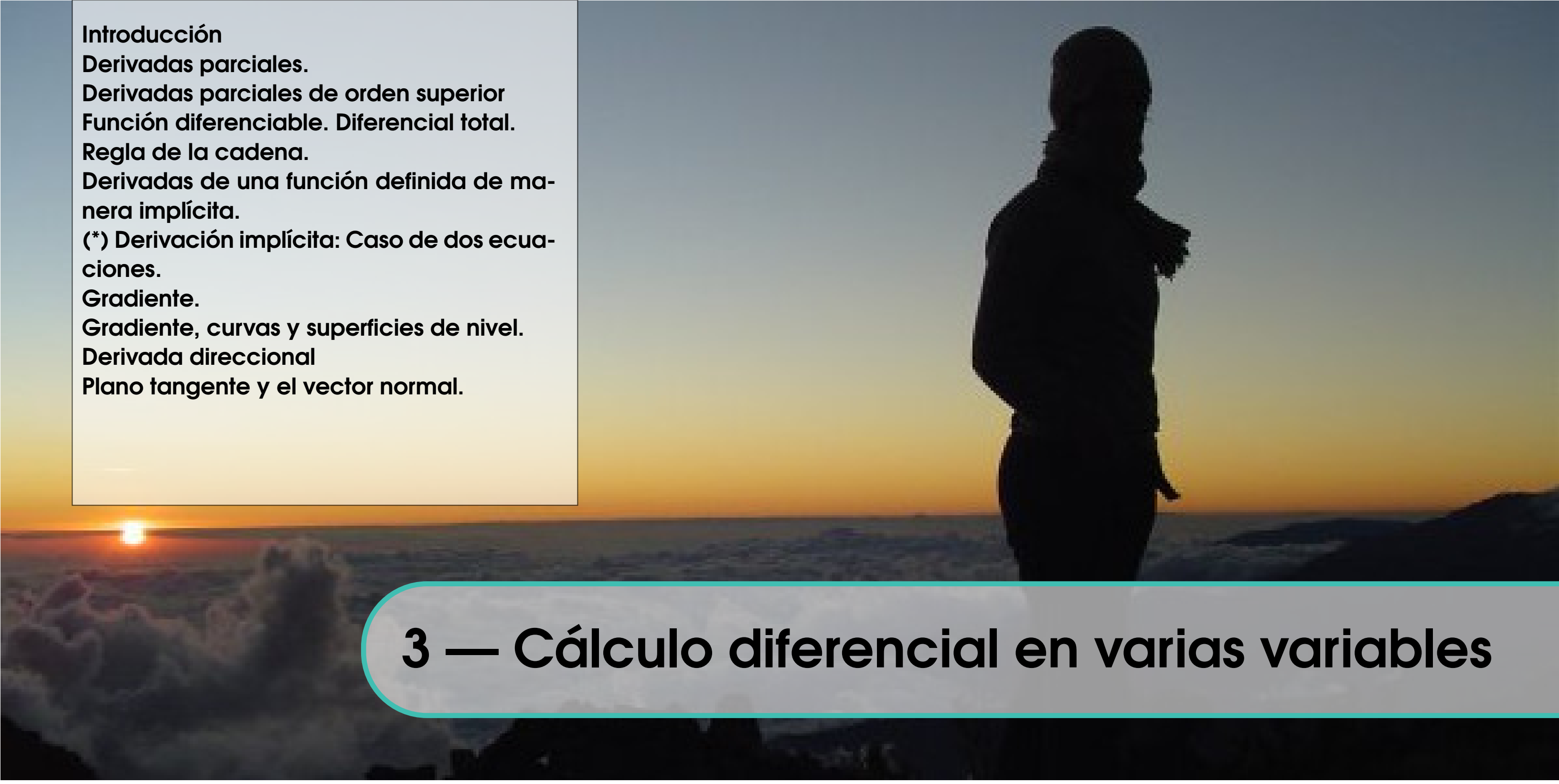


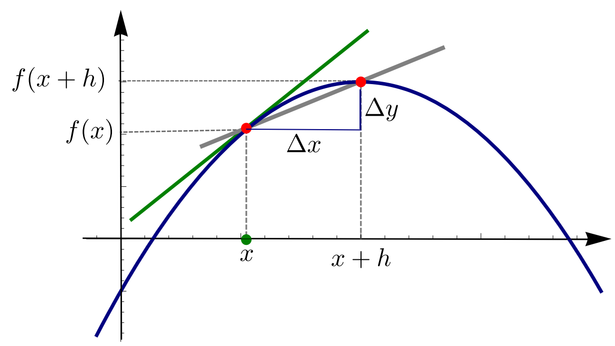
3 — Cálculo diferencial en varias variables

3.1 Introducción

La derivada de una función de una variable mide la tasa de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función $y = f(x)$ en x es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Geométricamente, la derivada de f en x es la pendiente de la recta tangente a f en x.



Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la derivada de f en $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in R^2$, mide la tasa (instántanea) de cambio de f a través de la recta $L(h) = \boldsymbol{x} + h\,\boldsymbol{v}$ cuando $h = 0$. De nuevo, esta derivada en la dirección de $\boldsymbol{v}$ se obtiene como un límite,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

El cambio en la recta es $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} - h\,\boldsymbol{v}|| = ||h\,\boldsymbol{v}|| = h$ ($\boldsymbol{v}$ es unitario). Geométricamente, esta derivada es la pendiente de la recta tangente a la *curva* $C(h) = (x_0 + h\,v_1, y_0 + h\,v_2, f(\boldsymbol{x} + h\,\boldsymbol{v}))$ en $h = 0$. Esta curva es la intersección de la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano generado por la recta L tal y como se muestra en la figura (3.1).

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

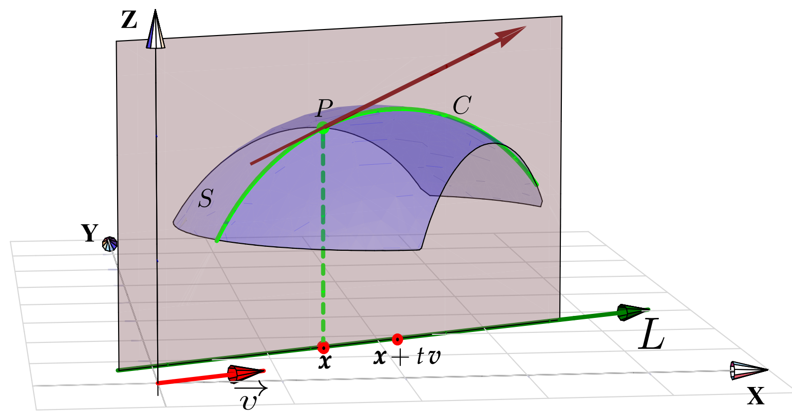


Figura 3.1: Derivada direccional en la dirección de $\boldsymbol{v}$

De particular interés son la derivada en la dirección del eje X, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, y la derivada en la dirección del eje Y, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; llamadas *derivadas parciales* respecto a x e y respectivamente.

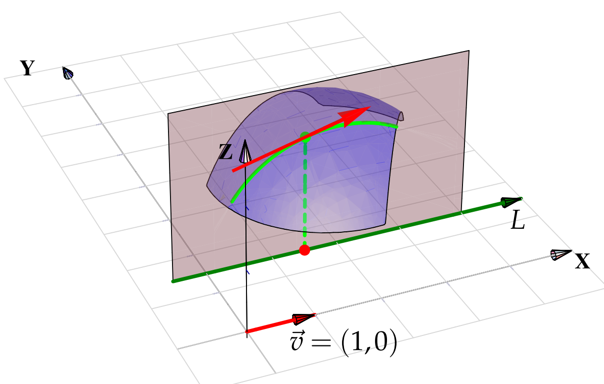


Figura 3.2: Derivada parcial en la dirección de X

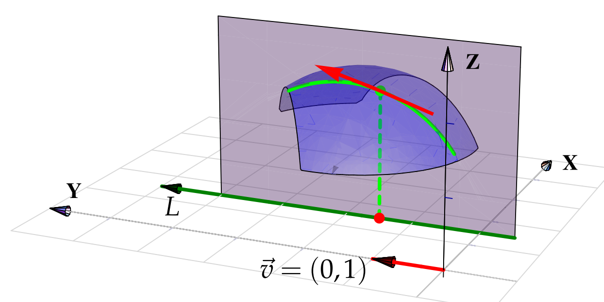


Figura 3.3: Derivada parcial en la dirección de Y

3.2 Derivadas parciales.

Definición 3.1 (Derivadas parciales).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la *derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f respecto a la variable x_i en el punto $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e_i}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Aquí $\boldsymbol{e_i} = (0, ..., 1, ...0)$ con un 1 en la $i-$ésima posición. El dominio de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que este límite existe.

Caso de dos variables

Cuando $z = f(x,y)$, es común denotar las derivadas parciales con $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z_x o f_x. Según la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Es decir, para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ derivamos de manera oridinaria f respecto a x pensando en y como una constante y para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ derivamos de manera oridinaria f respecto a y pensando en x como una constante. Esto es válido siempre y cuando apliquen los teoremas de derivadas en una variable.

Ejemplo 3.1 (Cálculo directo y por definición).

Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$, entonces aplicando la regla del producto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3y^{2/3}}.$$

Esta es la manera de derivar f respecto a x y respecto a y usando teoremas de derivadas. Sin embargo esto no decide si la función es derivable o no en $(0,0)$. Para saber si estas derivadas parciales existen en $(0,0)$, se debe calcular usando la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

es decir, en este caso la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(0,0)$ y es cero y también $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Ejemplo 3.2 **(Derivadas parciales de funciones de dos variables).**

En este ejemplo se muestra como calcular derivadas parciales usando las reglas de derivación ordinaria.

Recordemos que en una variable, $[kf(x)]' = kf'(x)$ y $\left[\dfrac{k}{f(x)}\right]' = \dfrac{-k\cdot f'(x)}{f^2(x)}$.

- $z = x^2y^2 + y \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 0$

- $z = x^2y^2 + y \implies \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + 1$

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} = \dfrac{1}{y^5}\cdot x^3 \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^5}\cdot 3x^2$

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} \implies \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x^3\cdot 5y^4}{y^{10}}$

Recordemos que en una variable, $[a^u]' = a^u\ln(a)\,u'$ y $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Si $z = x^y$ con $x > 0$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$

- Si $z = x^y$ con $x > 0$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$

- Si $C(r,\theta) = r^n\cos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ una contante. Entonces $\dfrac{\partial C}{\partial r} = nr^{n-1}\cos(n\theta)$ y $\dfrac{\partial C}{\partial \theta} = -nr^n\operatorname{sen}(n\theta)$

Recordemos que en una variable, si $u = g(x)$ entonces $[f(u)]' = f'(u)\cdot u'$.

- Si $z = \arctan(y/x) \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{-y\cdot 1}{x^2}$

- Si $z = \dfrac{\cos(xy) + x\operatorname{sen}2y}{2}$ entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi/2) = \left.\dfrac{-y\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}2y}{2}\right|_{x=\pi,\ y=\pi/2} = \dfrac{-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi^2/2)}{4}$.

- Sea f de una variable y derivable, y $z = f(u)$ con $u = x^5 + y^3$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot 5x^4$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot 3y^2$

- Sean f y g funciones derivables de una variable y $z = \dfrac{f(u)}{g(u)}$ con $u = x^5 + y^3$, entonces
  - $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial x}[f(u)]\cdot g(u) - \dfrac{\partial}{\partial x}[g(u)]\cdot f(u)}{g^2(u)} = \dfrac{f'(u)\cdot 5x^4\cdot g(u) - g'(u)\cdot 5x^4\cdot f(u)}{g^2(u)}$
  - $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial y}[f(u)]\cdot g(u) - \dfrac{\partial}{\partial y}[g(u)]\cdot f(u)}{g^2(u)} = \dfrac{f'(u)\cdot 3y^2\cdot g(u) - g'(u)\cdot 3y^2\cdot f(u)}{g^2(u)}$

3.3 Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables x e y, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales cuales se llaman segundas derivadas parciales de f. Si $z = f(x,y)$, se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales,

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

La notación f_{xy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y, mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

Ejemplo 3.3

Calcule las segundas derivadas parciales de $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$

Solución: Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^2 \qquad f_y(x,y) = 2x^2y + 3y^2$$

De donde obtenemos que :

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 2y^2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + 2xy^2)\right] = 4xy$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y + 3y^2\right] = 4xy$$

$$f_{yy}(x,y) = 6y + 2x^2$$

Ejemplo 3.4

Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y sea $z = f(u)$ con $u = x^3y^4$. Entonces,

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot 3x^2y^4$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot x^3\,4y^3$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\cdot 3x^2y^4\cdot 3x^2y^4 \;+\; 6xy^4 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)\cdot 4x^3y^3\cdot 4x^3y^3 \;+\; 12x^3y^2 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f''(u)\cdot 4x^3y^3\cdot 3x^2y^4 \;+\; 12x^2y^3 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''(u)\cdot 3x^2y^4\cdot 4x^3y^3 \;+\; 12x^2y^3 f'(u)$

Ejemplo 3.5

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$ se conoce como ecuación de Laplace, en honor a Pierre Laplace (1749 - 1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Compruebe que la función $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace.

Solución: Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$u_x = e^y \cos x$$
$$u_y = e^y \operatorname{sen} x$$

con lo cual

$$u_{xx} = -e^y \operatorname{sen} x$$
$$u_{yy} = e^y \operatorname{sen} x$$

de donde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0$

Ejemplo 3.6

La ecuación de onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde a es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ satisface la ecuación de onda.

Solución: Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+at) + g'(x+at), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+at) + g''(x+at)$$

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a t están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(x+at) + ag'(x+at), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x+at)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x+at) = a^2[f''(x+at) + g''(x+at)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ejemplo 3.7

Consideremos f y g funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Solución: Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por

$u_x = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)$

$u_{xx} = f'(x+y) + f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) = 2f'(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)$

$u_{xy} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$

$u_y = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)$

$$u_{yy} = xf''(x+y) + g'(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y) = 2f''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) - 2f'(x+y) - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) \\ &\quad -2yg''(x+y) + xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8

Compruebe que la función $u(x,y) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Solución: Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z^2} = -\frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

y al sumarlas obtenemos el resultado deseado.

Observación: Note que las *derivadas parciales mixtas* f_{xy} y f_{yx} en el ejemplo anterior son iguales. El siguiente teorema, da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que estas derivadas son iguales. El teorema es conocido de Clairaut o también como Teorema de Schwarz.

Teorema 3.1 (Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar donde D es un disco abierto con centro en (a,b) y radio δ, si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Ejemplo 3.9 **(Hipótesis en el Teorema de Clairaut).**

Sea $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y $f(0,0)=0$. Se tiene $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, pero $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. En efecto, aunque f_{xy} y f_{yx} están definidas en $(0,0)$, *no son continuas* en este punto. Para ver esto, podemos calcular estas derivadas de dos maneras distintas y observar que el valor difiere. Primero derivamos sobre la recta $x=0$ y luego sobre la recta $y=0$.

$$z_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = -y$$

y

$$z_x(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hx(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = x$$

Ahora

$$z_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \quad \text{y} \quad z_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

Esto muestra que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. El gráfico de $f(x,y)$ muestra un salto en $(0,0)$

10 Ejercicios

3.1 Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y(2,1)$.

3.2 Sea $f(x,y) = \ln^5(x^y + x^2 + 2^y)$ Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

3.3 Sea $z(x,y) = 2(ax+by)^2 - (x^2+y^2)$ con $a^2+b^2=1$. Verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3.4 Sea $z = f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ con f derivable. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.5 Sea $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Demuestre que $zx\dfrac{\partial z}{\partial x} + zy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

3.6 Sea $C(x,t) = t^{-1/2}\, e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

3.7 Sea $z = f(x^2y + y) \cdot \sqrt{x + y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

3.8 Verifique que $u(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3.9 Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Verifique que $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

3.10 Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante y f y g funciones dos veces derivables. Verifique que $u(x, t) = f(x-at)+g(x+at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

3.11 Verifique que $z = \ln(e^x + e^y)$ es solución de las ecuación diferencial $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ y de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

3.12 Sea f una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y sea $w(x, y) = f(y \operatorname{sen} x)$. Verifique que

$$\cos(x)\,\frac{\partial w}{\partial x} + y \operatorname{sen}(x)\,\frac{\partial w}{\partial y} = y f'(y \operatorname{sen} x)$$

3.13 Sea $g(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(3x - 2y)$. Verifique la identidad

$$x \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} + 6x \cdot g(x, y).$$

3.14 La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en paralelo en un circuito eléctrico está dado por la fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$. Calcule $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$. Sugerencia: derive a ambos lados respecto a R_1.

3.15 La ley de gases para un gas ideal de masa fija m, temperatura absoluta T, presión P y volumen V es $PV = mRT$ donde R es la constante universal de los gases ideales. Verifique que $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.

3.16 La energía cinética de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \dfrac{1}{2}mv^2$. Verifique que $\dfrac{\partial K}{\partial m}\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$.

3.17 Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $u = x^2 + y^2$ y $w(x, y) = f(u) \cdot g(y)$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

3.18 Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $w(x, y) = f(u) + g(v)$ donde $u = \dfrac{x}{y}$ y $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

3.19 Sea $w = e^{3x} \cdot f(x^2 - 4y^2)$, donde f es una función derivable. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

3.20 Sea $u(r,\theta) = r^n \cos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ una contante. Verfique que u satisface la ecuacón

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

3.4 Función diferenciable. Diferencial total.

Definición 3.2 Función diferenciable

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Si las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $(x_0, y_0) \in U$, entonces f es *diferenciable* en (x_0, y_0).

En una variable, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ se puede aproximar con el diferencial $dy = f'(x_0)\,dx$. De manera similar, el cambio en f en dos variables es

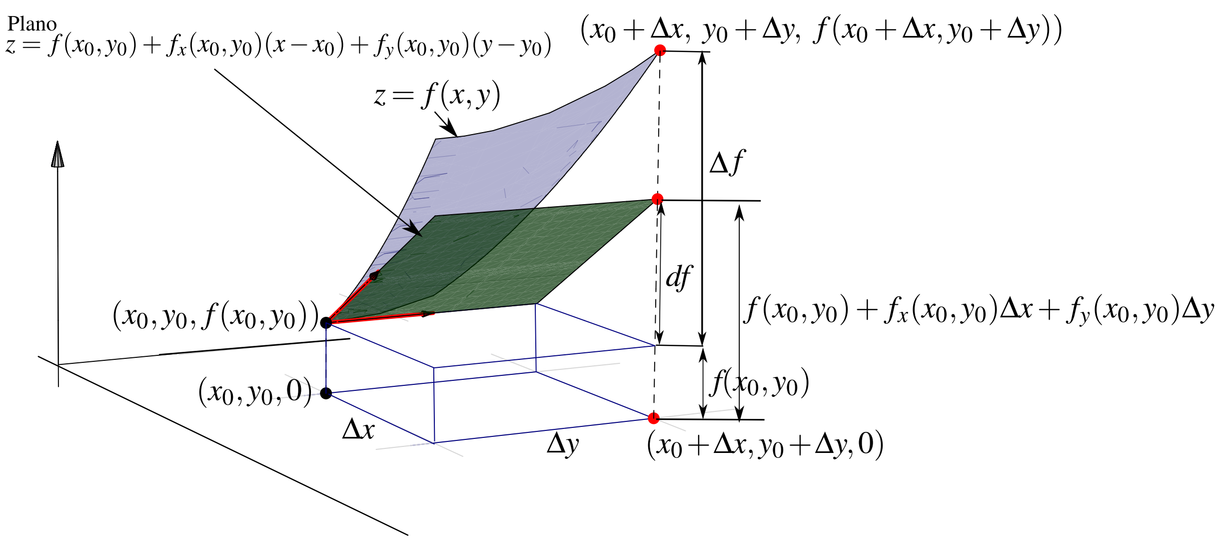
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

y se puede aproximar con el *diferencial total,*

$$df = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

Es decir, si f es diferenciable en (x_0, y_0) y si $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son pequeños, entonces f se puede aproximar usando el plano tangente:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y.$$



Si $z = f(x, y)$ es diferenciable, el diferencial total df representa el incremento de f a lo largo del plano tangente a f en el punto (x, y). Sería como calcular con el plano tangente en vez de usar la superficie S (ver figura anterior).

3.5 Regla de la cadena.

Recordemos que en una variable, si $f(u)$ y $u(x)$ son derivables, entonces la regla de la cadena establece

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena nos indica como varía f conforme recorremos la trayectoria $u(x)$. Formalmente es la derivada de f en presencia de un cambio de variable u. En funciones de varias variables la relación persiste en un siguiente sentido.

Teorema 3.2 (Regla de la cadena – Caso I).

Sean $x=x(t)$ y $y=y(t)$ derivables y $z=f(x,y)$ diferenciable en $(x,y)=(x(t),y(t))$, entonces $z=f(x(t),y(t))$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

Teorema 3.3 (Regla de la cadena – Caso II.)

Sean $x=x(u,v)$ y $y=y(u,v)$ con derivadas parciales en (u,v). Si $z=f(x,y)$ es diferenciable en $(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$ entonces $z=f((x(u,v),y(u,v)))$ tiene derivadas parciales de primer orden en (u,v) y

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.10

Sea $z(x,y)=\sqrt{\arctan(y/x)+\tan(xy)}$. Podemos hacer un cambio de variable y calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ usando la regla de la cadena. Sea $u(x,y)=\arctan(y/x)$ y $v(x,y)=\tan(xy)$, entonces $z(x,y)=\sqrt{u+v}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y\cdot 1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,y\sec^2(xy)\end{aligned}$$

Al sustituir u y v obtenemos el resultado completo, si fuera necesario.

Ejemplo 3.11

Sea $z(x,y)=x^2+3y^2$, donde $x=e^t$ y $y=\cos(t)$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\
&= 2xe^t-6y\,\text{sen}(t) \;=\; 2e^{2t}-6\cos(t)\,\text{sen}(t)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.12

Sea $z(u,v)=x^2e^{y^3}$, donde $x=uv$ y $y=u^2-v^3$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
&= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial u}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial u} \;=\; 2xe^{y^3}v+3x^2y^2e^{y^3}2u\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\
&= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial v}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial v} \;=\; 2xe^{y^3}u+3x^2y^2e^{y^3}\cdot -3v^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.13

Sea f una función diferenciable y $z(x,y)=f(x^2,xy^2)$. Para derivar usando la regla de la cadena usamos el cambio de variable $u=x^2$ y $v=xy^2$, entonces $z(x,y)=f(u,v)$ y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y^2\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2xy
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14

Sea f una función derivable y $z=f(x,y)$ con $x=r\cos\theta,\ y=r\operatorname{sen}\theta,$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot -r\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15

Sean f y g funciones diferenciables. Si $z(x,y)=g(y)\cdot f(x-2y,\ y^3)$. Calcule z_x y z_{xy}.

Solución: Sea $u=x-2y,\ \ v=y^3$. Entonces $z(x,y)=g(y)\,f(u,v)$.

$z_x=g(y)\left[f_u\cdot 1+f_v\cdot 0\right]=g(y)\,f_u(u,v)$

$z_{xy}=g'(y)\cdot 1\cdot f_u(u,v)\ +\ g(y)\left[-2\,f_{uu}\ +\ 3y^2\,f_{uv}\right]$

Ejemplo 3.16

Sea $V=V(P,T)$. Si $P(V-b)e^{RV}=RT$, con b,R constantes, calcule $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

Solución: V es función de P y T. Derivamos a ambos lados respecto a T,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}\left[P(V-b)e^{RV}\right] &= \frac{\partial}{\partial T}[RT]\\ P\left[V_T e^{RV}+(V-b)e^{RV}RV_T\right] &= R\\ \therefore\ V_T &= \frac{R}{Pe^{RV}(1+(V-b)R).}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.17

Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $z(x,y)=g(u,v)$ con $u=x^2y^2$ y $v=xy$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 2xy^2+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\right]\cdot 2xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^2\right]\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\right]\\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot v_y\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + x\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot v_y\right]\\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot x\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + x\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot x\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.18

Sea $F(u,v)=-u-v$ con $u^2=x-y$ y $v^2=x+y$. Si $u\neq 0$ y $v\neq 0$, verifique

a.) $F_x = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = -\dfrac{v-u}{2uv}$.

Solución: Primero veamos que $2u\,u_x=1,\ 2v\,v_x=1,\ 2u\,u_y=-1$ y $2v\,v_y=1$. Por lo tanto

a.) $F_x = F_u\,u_x + F_v\,v_x = -1\cdot\dfrac{1}{2u} - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = F_u\,u_y + F_v\,v_y = -1\cdot\left(-\dfrac{1}{2u}\right) - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = -\dfrac{v-u}{2uv}$.

11 Ejercicios

3.21 Sea $z = xy^2 + x$ con $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \tan(t)$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

3.22 Sea $w = x^2 + 2xy + y^2$ con $x = t\cos t$ y $y = t\operatorname{sen} t$. Calcule $\dfrac{dw}{dt}$.

3.23 Sea $z = u\sqrt{u+v^2}$ con $u = xy$ y $v = \arctan(y/x)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3.24 Sea $z = g(y)\cdot f(x,y)$ con f y g funciones con derivadas de segundo orden.

a.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

b.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

c.) Si $x = t^2$ y $y = u^2 + t^3$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial u}$

3.25 Sea $z = f(xy, x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden f_u, f_{uv}, f_{uu} y f_{vv}, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3.26 Sea $z = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$, donde $f = f(x,y)$ es una función con derivadas de segundo orden. Si $x = u^2 + v$ y $y = u + v^2$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

3.27 Sea $z = f(u,v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden f_u, f_{uv}, f_{uu} y f_{vv} continuas (es decir, $f_{uv} = f_{vu}$). Verifique que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

3.28 Sea $z = f(x^2 + \cos y,\, x^2 - 1) - g(3xy^2)$ con g derivable y f con derivadas parciales continuas y de segundo orden. Calcule z_{xy}

3.29 Sea $z = x^2 f^4(xy, y^2)$ con f con derivadas parciales continuas. Calcule z_y y z_x

3.30 Sea $z = f(x^2 - y, xy)$ donde $s = x^2 - y$ y $t = xy$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ (Sugerencia: Calcule z_x y z_y y despeje lo que se pide).

3.6 Derivadas de una función definida de manera implícita.

Supongamos que se conoce que z es una función de x e y, es decir, $z = f(x,y)$, pero que z *está definida de manera implícita* por una ecuación del tipo

$$F(x,y,z) = 0$$

Estas situaciones ya las hemos encontrado antes, por ejemplo en la ecuación de una esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Esta ecuación define a z como una función de x y y y en este caso, z se puede despejar:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \ \text{ y } \ z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

Cuando una función está definida de manera implícita, no siempre es posible despejarla. Por ejemplo considere $y^2+xz+z^2-e^z-1=0$. Pero si podemos calcular las derivadas parciales.

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para z_x y z_y. Supongamos que $z=z(x,y)$ es una función diferenciable que satisface la ecuación $F(x,y,z(x,y))=0$ en algún conjunto abierto D.

Sea $g(x,y)=F(x,y,z)=0$, aplicando la regla de la cadena a $g(x,y)=F(u,v,w)$, con $u(x,y)=x$, $v(x,y)=y$ y $w(x,y)=z(x,y)$, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

Ahora, como $\dfrac{\partial g}{\partial x}=0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Despejando,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \ \text{ en todos los puntos de } D \text{ donde } \ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x,y,z(x,y))}\neq 0$$

De manera similar, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$

Teorema 3.4

Si F es diferenciable en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$ y si la ecuación $F(x_1,x_2,...,x_n)=0$ define a x_n como una función diferenciable $x_n=f(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ en algún conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}$$

en aquellos puntos en los que $\dfrac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0.$

z definida de manera implícita por $F(x,y,z)=0$.

Si $z = z(x,y)$ está definida de manera implícita por $F(x,y,z) = 0$ de acuerdo a las hipótesis del teorema 3.6, entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \text{ y } z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si x y z son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} \text{ y } y_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones $F(x,y,z,u)=0$.

Ejemplo 3.19

Sea z definida de manera implícita por $F(x,y,z) = xyz + x + y - z = 0$. Como se cumplen las condiciones del teorema 3.6 entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zy+1}{xy-1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{zx+1}{xy-1}$$

Ejemplo 3.20

Calcule z_x y z_y si $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ define a z como $z = z(x,y)$.

Solución: Dado que $F_x = 2x$, $F_y = -4x - z + 1$, $F_z = 6z - y$, entonces si $F_z \neq 0$, por el teorema 3.6,

$$z_x = -\frac{2x}{6z-y}$$

$$z_y = -\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 6z(x,y) - y = 0.\}$

Ejemplo 3.21

Considere la función z definida de manera implícita por $x^2+y^2+z^2-1=0$. Calcular z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} y z_{yx}

Solución:

z está definida de manera implícita por $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$. Entonces,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Para calcular z_{xy}, z_{xx} y z_{yy} debemos notar que z_x y z_y *no son* funciones definidas de implícita, como tal derivamos de manera ordinaria.

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{z}\right)}{\partial x} = -\frac{1\cdot z - x\,z_x}{z^2} = -\frac{z - x\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(z_y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{z}\right)}{\partial y} = -\frac{1\cdot z - y z_y}{z^2} = -\frac{z^2+y^2}{z^3},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{y\cdot z_x}{z^2} = \frac{y\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2}.$$

Ejemplo 3.22

Si $F(xz, yz) = 0$ define a z como función implícita de x e y y además cumple con las condiciones del teorema 3.6 en cada punto de una región D, entonces verifique que, en D, se satisface la ecuación

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

Solución: Sea $u = xz$ y $v = yz$, entonces $F(xz, yz) = F(u,v) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u \cdot 0 + F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u \cdot z + F_v \cdot 0}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -y \cdot \frac{F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} + -x \cdot \frac{F_u \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
&= -\frac{z\left(F_u \cdot x + F_v \cdot y\right)}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
&= -z
\end{aligned}$$

3.7 (*) Derivación implícita: Caso de dos ecuaciones.

Supongamos que $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, u, v) = 0$$

Para deducir las expresiones para u_x, u_y, v_x, v_y se resuelve el sistema

$$\begin{cases} dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

para du y dv. Si $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$, obtenemos

$$du = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dx - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} dy$$

como $du = u_x\, dx + u_y\, dy$ entonces se obtienen las fórmulas (siempre y cuando $J \neq 0$.)

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{J}, \qquad u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{J}$$

y

$$v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{J}, \qquad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{J}$$

Ejemplo 3.23

Si $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0,$$

$$G = u + v - x^2 + y = 0,$$

calcular u_x y u_y.

Solución: Como $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(u-v),$

entonces,

$$u_x = \frac{x(1-2v)}{u-v} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{1+2v}{2(u-v)}.$$

Ejemplo 3.24

Sea $z = f(x,y)$ definida por $z = u + v$ donde $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F = u + e^{u+v} - x = 0$$

$$G = v + e^{u-v} - y = 0$$

Si $u = v = 0$ entonces $x = y = 1$. Calcular $z_x(1,1)$.

Solución: $z_x = u_x + v_y$. Podemos calcular u_x y v_y usando las fórmulas respectivas, sin embargo, para cálculos numéricos es más práctico derivar respecto a x las expresiones $F = 0$ y $G = 0$. En efecto, derivando respecto a x obtenemos

$$u_x + e^{u+v}(u_x + v_x) - 1 = 0 \quad \text{y} \quad v_x + e^{u-v}(u_x - v_x) = 0$$

de modo que cuando $x = 1, y = 1, v = u = 0$ se obtiene

$$2u_x + v_x - 1 = 0 \text{ y } u_x = 0$$

con lo que $u_x = 0$ $v_x = 1$ si $x = 1, y = 1, v = u = 0$. Así que $z_x(1,1) = 0+1 = 1$.

12

Ejercicios

3.31 Si $x^2y^2 + \text{sen}(xyz) + z^2 = 4$ define a z como función implícita de x e y, verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3.32 Sea $g\left(\frac{xy}{z}, x^2+y^2\right) = 0$ una ecuación que define a z como una función de x e y. Verifique que si g_x, g_y y g_z existen y son continuas en toda la región en la que $g_z \neq 0$, entonces

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z(x^2-y^2)}{xy}$$

3.33 Sea $z = f(z/xy)$ con f dos veces derivable. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ y verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3.34 Sea $z = x\ln(yz)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3.35 Si $f(zx, y^2) = xy$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_{xy}.

3.36 Si $f(zx, y^2) + g(z^2) = 5 define a z como función implícita de$ x y y, calcule z_x y z_y

3.8 Gradiente.

Definición 3.3 (Campo Gradiente).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función (o campo) escalar diferenciable en una región R, entonces la función (o campo) gradiente de f es la función vectorial $\nabla f : R \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n}\right)$$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x, f_y\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(f_x, f_y\, f_z\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Interpretación geométrica del campo gradiente. El gradiente $\nabla z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial (campo gradiente). Por ejemplo, consideremos el paraboloide $z - 1 = x^2 + y^2$, el campo gradiente de z es $\nabla z = (2x, 2y)$. Una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se ve en la figura 3.4. Los vectores apuntan en la dirección de máximo crecimiento del paraboloide y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la 'intensidad' de esta razón de cambio.

Ahora consideremos el paraboloide $z - 3 = -x^2 - y^2$, el campo gradiente de z es $\nabla z = (-2x, -2y)$. Una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se ve en la figura 3.5. Los vectores apuntan en la dirección de máximo decrecimiento del paraboloide y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la 'intensidad' de esta razón de cambio

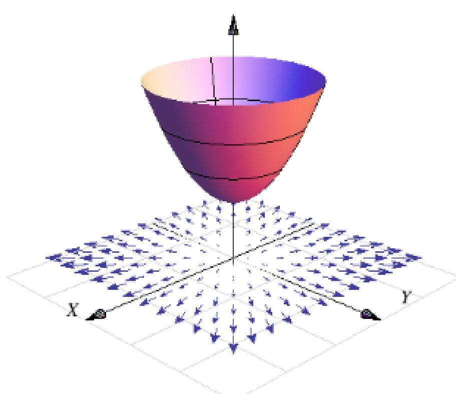


Figura 3.4: $\nabla z(P)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento respecto a P

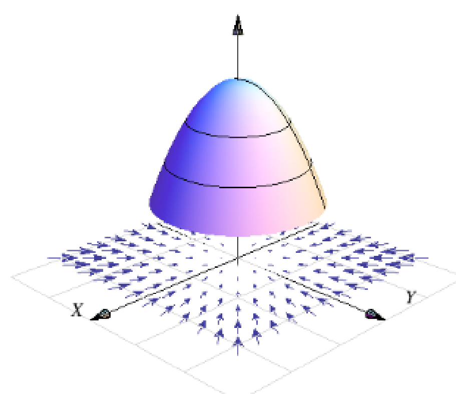


Figura 3.5: $\nabla z(P)$ apunta en la dirección de máximo decrecimiento respecto a P

Ejemplo 3.25

- Si $f(x,y) = \operatorname{sen} xy + x^2y^2$, calcule $\nabla f(\pi, 1)$.

  Solución: El gradiente está dado por :

$$\nabla f(x,y) = \left(y\cos xy + 2xy^2\right)\,\hat{\imath} + \left(x\cos xy + 2x^2y\right)\,\hat{\jmath}$$

y evaluando

$$\nabla f(\pi,1) = (2\pi - 1)\,\hat{\imath} + \left(2\pi^2 - \pi\right)\,\hat{\jmath}$$

- Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcule $\nabla z(x,y)$.

  Solución: Excepto en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (curva de nivel $z = 0$), se puede calcular

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z},\right) = -\frac{x}{z}\,\hat{\imath} + -\frac{y}{z}\,\hat{\jmath}$$

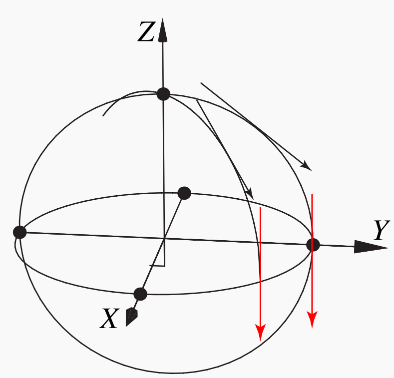
- Si $G(x,y,z) = x^2z + z^3y + xyz$, calcule $\nabla G(x,y,z)$.

  Solución:

$$\nabla G(x,y,z) = (G_x,\ G_y,\ G_z) = (2xz + yz)\,\hat{\imath}\ +\ (z^3 + xz)\,\hat{\jmath}\ +\ (x^2 + 3z^2y + xz)\,\hat{k}$$

Ejemplo 3.26

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sea $P = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S$.



El gradiente de z es $\nabla z(x,y) = \left(-\dfrac{x}{z}, -\dfrac{x}{z}\right)$.

$\nabla z(P) = (-1,-1)$.

El gradiente no está definido si $z = 0$ porque las derivadas parciales se indefinen (las tangentes a la superficies sobre la circunfencia $x^2 + y^2 = 1$ son rectas verticales)

3.9 Gradiente, curvas y superficies de nivel.

Recordemos que si $z = f(x,y)$ entonces la curva $z = c$ (es decir, $c = f(x,y)$) la llamamos "curva de nivel". Si tenemos $w = g(x,y,z)$, la superficie $w = 0$ (es decir $0 = g(x,y,z)$), se denomina *superficie de nivel* $w = 0$.

Si S es una superficie de ecuación $G(x,y,z)=0$, con G derivable con continuidad en el plano, y si $P=(x_0,y_0,z_0)\in S$, entonces,

1. Si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, en P se tiene, $\nabla z(x,y)=\left(-\dfrac{G_x}{G_z},-\dfrac{G_y}{G_z}\right)$

   El vector $\nabla z(x_0,y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $z=z_0$, es decir $\nabla z(x_0,y_0)$ es perpendicular al vector tangente en (x_0,y_0). Si necesitamos un vector perpendicular, podríamos usar solamente $(-G_x,-G_y)$.

   Por supuesto, si la ecuación de la superficie es $z=f(x,y)$, podemos calcular el gradiente de la manera usual tomando $G=z-f(x,y)=0$ y entonces $G_z=1$.

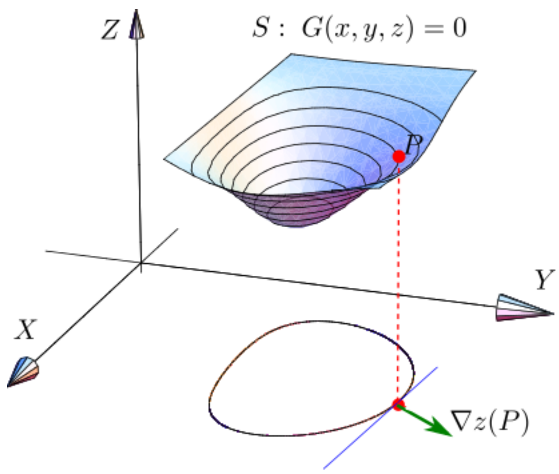


Figura 3.6: $\nabla z(x_0,y_0,z_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $z=z_0$.

2. El vector $\nabla G(x_0,y_0,z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $w=0$, es decir $\nabla G(x_0,y_0,z_0)$ es perpendicular a cada curva de la superficie S, que pasa por $P=(x_0,y_0,z_0)$.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

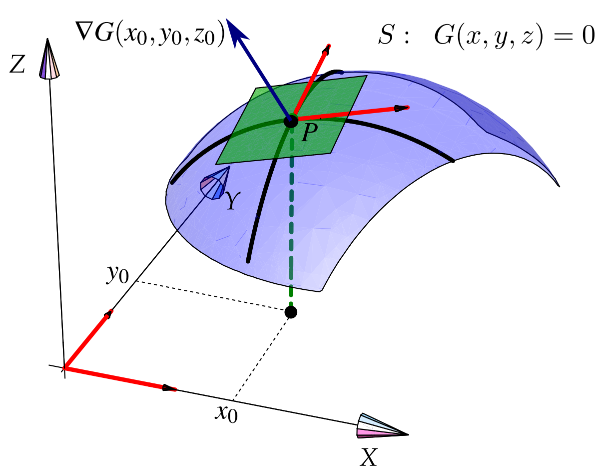


Figura 3.7: $\nabla G(P)$ es perpendicular (al plano tangente) a S en P.

Ejemplo 3.27

Considere la curva C de ecuación $y^2 - x^2(1+x) = 0$. Sea $P = \left(1/6, \sqrt{7}/\sqrt{216}\right)$. Observe que $P \in C$. Calcule un vector *perpendicular* a la curva en P.

Solución: Podemos ver C como una curva de nivel de $z = y^2 - x^2(1+x)$, concretamente la curva de nivel $z = 0$.

De acuerdo a la teoría, el vector $\nabla z(P)$ es perpendicular a la curva de nivel C en P. Veamos

$$\nabla z(x, y) = (-x^2 - 2x(x+1), 2y)$$

$$\nabla z(P) = (-5/12, \sqrt{7}/\sqrt{54})$$

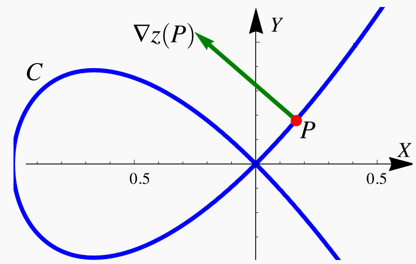


Figura 3.8: $\nabla z(P)$ es un vector perpendicular a la curva en P

En la figura 3.8 se muestra gráficamente la situación.

Ejemplo 3.28

Considere la superficie S de ecuación

$$\frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0.$$

Sea $P = (3, 2, 1 + 3\sqrt{3})$. Observe que $P \in S$. Calcule un vector *perpendicular* a la superficie S en P.

Solución: De acuerdo a la teoría, el vector $\nabla G(P)$ es perpendicular a la curva de nivel S en P donde $G(x, y, z) = \frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4$.

$$\nabla G(x, y, z) = (G_x, G_y, G_z) = \left(2(x-2), 2(y-2), \frac{2}{9}(z-1)\right)$$

$$\nabla G(P) = \left(2, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

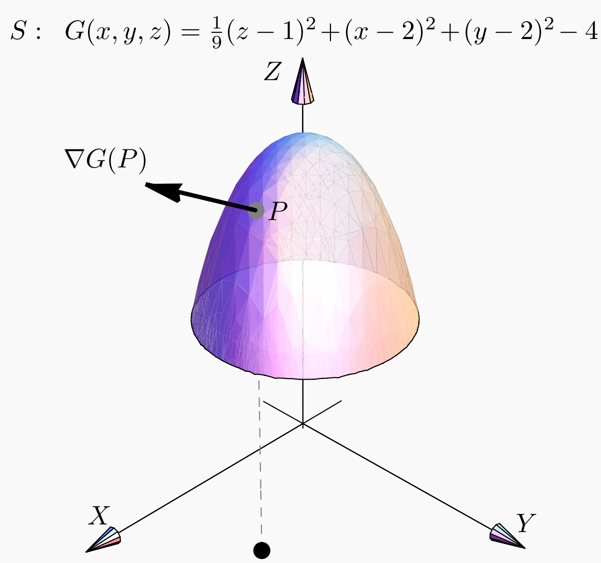


Figura 3.9: $\nabla G(P)$ (traslación) es un vector perpendicular a la superficie S en P

En la figura 3.9 se muestra gráficamente la situación.

3.10 Derivada direccional

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\vec{u} = (a,b)$, para esto consideremos la superficie S con ecuación $z = f(x,y)$ (la gráfica de f) y sea $z_0 = f(x_0,y_0)$. Entonces el punto $P = (x_0,y_0,z_0)$ pertenece a S. El plano vertical generado por la recta L que pasa por el punto $(x_0,y_0,0)$ en la dirección del vector $\vec{u}$, interseca a la superficie S en la curva C. La pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección del vector $\vec{u}$.

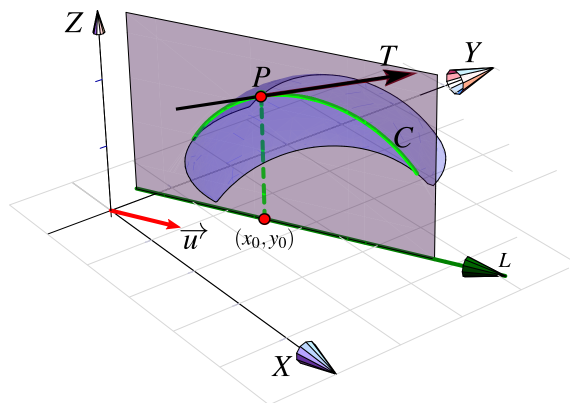


Figura 3.10: Derivada direccional

Sea $Q = (x,y,z)$ otro punto sobre la curva C, y sean $P' = (x_0,y_0)$ y $Q' = P' + h\vec{u}$ las proyecciones ortogonales sobre el plano XY de los puntos P y Q, entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P' = h\vec{u}$$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

para algún escalar h. Así pues,

$$x - x_0 = ha \Longrightarrow x = x_0 + ha$$
$$y - y_0 = hb \Longrightarrow y = y_0 + hb$$

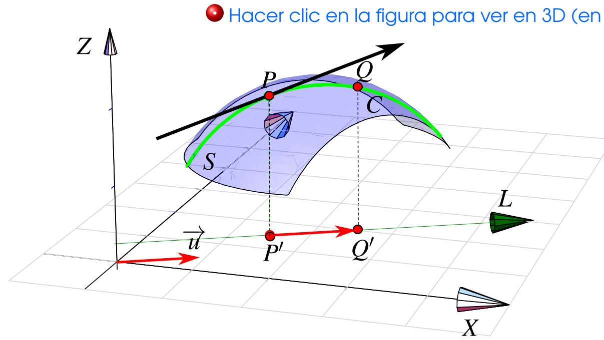


Figura 3.11: $||\overrightarrow{P'Q'}|| = h||\vec{u}||$

El cambio sobre recta L es $||\overrightarrow{P'Q'}|| = h||\vec{u}|| = h$ ($\vec{u}$ es unitario), por tanto la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h||\vec{u}||} = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb)\ -\ f(x_0,y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \longrightarrow 0$ (siempre y cuando este límite exista) obtenemos la tasa de cambio instantánea de z (con respecto a la distancia) en la dirección de $\vec{u}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$.