3.10 Derivada direccional

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\vec{u} = (a, b)$, para esto consideremos la superficie S con ecuación $z = f(x, y)$ (la gráfica de f) y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertenece a S. El plano vertical generado por la recta L que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0)$ en la dirección del vector $\vec{u}$, interseca a la superficie S en la curva C. La pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección del vector $\vec{u}$.

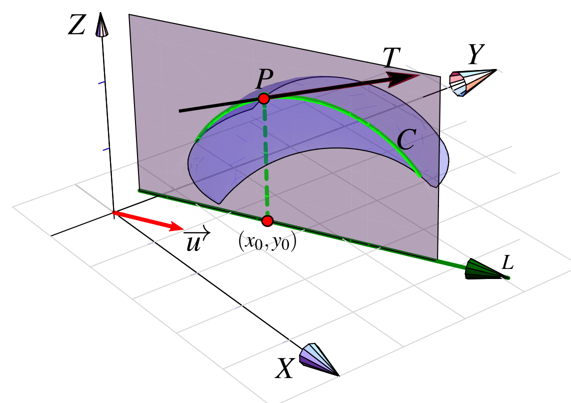


Figura 3.10: Derivada direccional

Sea $Q = (x, y, z)$ otro punto sobre la curva C, y sean $P' = (x_0, y_0)$ y $Q' = P' + h\vec{u}$ las proyecciones ortogonales sobre el plano XY de los puntos P y Q, entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P' = h\vec{u}$$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

para algún escalar h. Así pues,

$$x - x_0 = ha \Longrightarrow x = x_0 + ha$$

$$y - y_0 = hb \Longrightarrow y = y_0 + hb$$

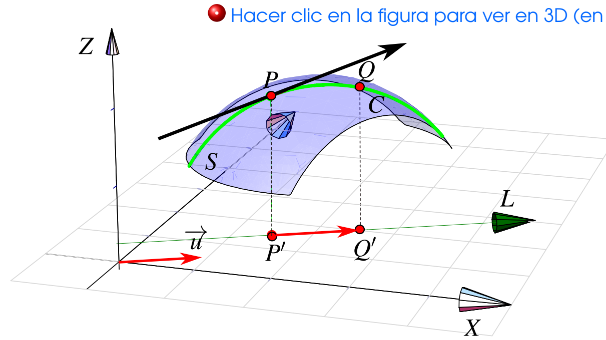


Figura 3.11: $||\overrightarrow{P'Q'}|| = h||\vec{u}||$

El cambio sobre recta L es $||\overrightarrow{P'Q'}|| = h||\vec{u}|| = h$ ($\vec{u}$ es unitario), por tanto la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h||\vec{u}||} = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb)\ -\ f(x_0, y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \longrightarrow 0$ (siempre y cuando este límite exista) obtenemos la tasa de cambio instantánea de z (con respecto a la distancia) en la dirección de $\vec{u}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$.

Definición 3.4 (Derivada direccional).

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sean $(x_0, y_0) \in D$ y $\vec{u} = (a,b)$ un vector *unitario*, entonces la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, está dada por :

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Teorema 3.5 (Cálculo de la derivada direccional).

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en D, entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector no nulo $\vec{u} = (a,b)$ y está dada por:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \\ &= f_x(x,y) \frac{a}{||\vec{u}||} + f_y(x,y) \frac{b}{||\vec{u}||} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.29

Calcule la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x,y)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y $\vec{u} = (\sqrt{3},\ 1)$. Calcule $D_{\vec{u}} f(1,2)$.

Solución:

- Evaluar el gradiente: Como $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y,\ -3x + 8y)$ entonces $\nabla f(1,2) = (-3,\ 13)$
- $||\vec{u}|| = 2$
- Cálculo: $\left\{ \begin{aligned} D_{\vec{u}} f(\mathbf{1},\mathbf{2}) &= \nabla f(\mathbf{1},\mathbf{2}) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \\ &= (-3,\ 13) \cdot \frac{(\sqrt{3},\ 1)}{2} \\ &= -3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 13 \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$

Ejemplo 3.30

Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = x\,\text{sen}(yz)$, en el punto $P = (1,3,0)$ en la dirección del vector $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \hat{k}$.

Solución:

- El vector gradiente de la función f esta dado por

$$\nabla f(x,y,z) = (\text{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$$

  evaluando en P tenemos que $\nabla f(1,3,0) = (0,0,3)$.

- Por otro lado, como $||\vec{u}|| = \sqrt{6}$, un vector unitario en la dirección de $\vec{u}$ es

$$\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\hat{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

- Cálculo: $D_{\vec{u}}\,f(\mathbf{1,3,0}) = \nabla f(\mathbf{1,3,0}) \cdot \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = (0,0,3) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

Componente. Recuerdemos que la componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$ es $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||u||}$, esta componente es la longitud de la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ $\left(\text{proy}_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||u||}\,\vec{u}\right)$. Con lo cual, la fórmula

$$D_{\vec{u}}\,f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$$

nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente $\nabla f(P)$ en la dirección del vector $\vec{u}$

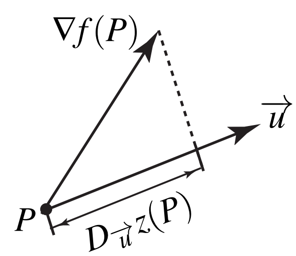


Figura 3.12

Dirección de máximo y mínimo cambio. Suponga que tenemos una función f de dos o de tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto P dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones. De modo que podemos plantear la siguiente pregunta : ¿En cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad?, y ¿cuál es la máxima razón de cambio?.

Intuitivamente, de acuerdo a la figura 3.12, la derivada direccional en P aumenta conforme el vector $\vec{u}$ se acerca al gradiente.

Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema.

Teorema 3.6 (Dirección de máximo cambio).

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}\, f(x, y)$ es $||\nabla f(x, y)||$ y se presenta cuando el vector no nulo $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x, y)$.

Podemos justificar esto, informalmente, de la manera que sigue. Primero recordemos que si $\theta = \measuredangle u, v$ entonces $u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cos(\theta)$. Ahora

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}}\, f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \\
&= ||\nabla f(x, y)|| \cos\theta.
\end{aligned}
$$

donde θ es el ángulo entre el vector *unitario* $\dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ y el vector $\nabla f(x, y)$.

El valor de $D_{\vec{u}}\, f(x, y)$ aumenta o disminuye solo si $\cos\theta$ cambia (si giramos el vector $\vec{u}$).

Así que el máximo valor se obtiene cuando $\cos\theta = 1$ (es decir $\theta = 0$). Por tanto $D_{\vec{u}}\, f(x, y)$ es máxima cuando $\theta = 0$ y en ese caso $\vec{u}$ y $\nabla f(x, y)$ son paralelos.

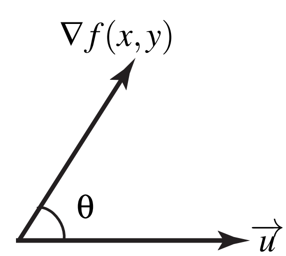


Figura 3.13

Valor mínimo: El valor mínimo de la derivada direccional es $-||\nabla f(x, y)||$ y ocurre cuando $\vec{u}$ tiene la dirección $-\nabla f(x, y)$.

Observación: f se mantiene constante sobre las curvas de nivel; la dirección (un vector $\vec{\boldsymbol{u}}$) en la que el cambio (instantáneo) de f respecto a P es nulo es la dirección de un vector perpendicular a $\nabla f(P)$. Que la derivada direccional se anule en P en la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$ no significa, por supuesto que en esta dirección la función se mantenga constante (esto solo pasa sobre las curvas de nivel) excepto que la curva de nivel sea una recta.

Ejemplo 3.31

Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dada por

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

donde T está medida en grados centígrados y x, y, z están en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto al punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento?

Solución: El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Evaluando en el punto $P = (1, 1, -2)$ obtenemos $\nabla T(1, 1, -2) = \dfrac{5}{8}\left(-\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 6\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

Por tanto, la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente

$$\vec{v} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 6\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente $||\nabla T(1, 1, -2)|| = \dfrac{5}{8}\left|\left|-\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 6\,\hat{\boldsymbol{k}}\right|\right| = \dfrac{5\sqrt{41}}{8}$

Ejemplo 3.32

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura de la derecha. Si la temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por

$$T(x, y) = 4(x - 2)^2 - 7(y - 0.4)^2$$

determine la dirección en la que debe de ir un insecto que está en el punto $P = (0, 0)$, para que se caliente lo más rápidamente. ¿Y qué debe hacer el insecto si desea ir por un camino en el que la temperatura se mantenga constante?

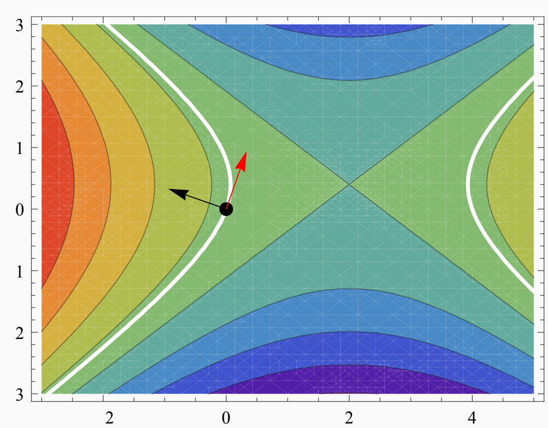


Figura 3.14: Mejor dirección, respecto a (4, 2).

Solución:

La dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente respeto a P es la dirección del gradiente (vector negro en la figura): $\nabla T(x,y) = (8(x-2), -14(y-0.4)) \Longrightarrow \nabla T(0,0) = (-16, 5.6)$

En cuanto a la otra pregunta, aunque la derivada direccional es nula en la dirección de un vector perpendicular al gradiente (vector rojo en la figura) esto solo dice que la razón de cambio instántaneo en esa dirección es cero. La trayectoria en la que la temperatra se mantiene constante es la curva de nivel $T(x,y) = T(0,0)$ (curvas blancas). Es por ahí donde debería caminar el insecto.

Vector unitario tangente.

Sea $r : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si la función vectorial r es continua en I, entonces la gráfica de r se le llama *curva* y decimos que esta curva esta descrita paramétricamente por $r(t)$.

Parametrización de rectas y elipses.

Rectas en $\mathbb{R}^3$. Si la recta L pasa por P en dirección de $\vec{u}$ entonces $r(t) = P + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Elipse. Consideremos la elipse $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Una parametrización es

$$r(t) = (h + a\cos(t))\,\hat{\imath} + (k + b\,\mathrm{sen}(t))\,\hat{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

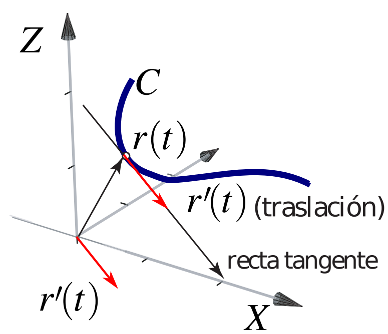


Figura 3.15: $r(t)$ parametriza a C. Vector tangente $r'(t)$.

Derivada de $r(t)$

La derivada de r (si existe) es $r'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{r(t+h) - r(t)}{h}$.

a.) Si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones derivables en I y si $r(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$, entonces

$$r'(t) = x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath}.$$

b.) Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones derivables en I y si $r(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$ entonces

$$r'(t) = x'(t)\,\hat{\imath} + y'(t)\,\hat{\jmath} + z'(t)\,\hat{k}.$$

La interpretación geométrica de $r'(t)$ sugiere la siguiente definición

Definición 3.5

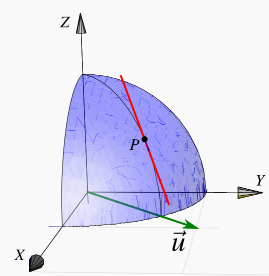
Sea C una curva descrita por la función vectorial continua $r(t)$, $t \in I$. Si existe la derivada $r'(t)$ y no es nula, la recta que pasa por $r(t)$ y es paralela a $r'(t)$ se llama tangente a C en $r(t)$. El vector $r'(t)$ se denomina vector tangente a C en $r(t)$. El vector unitario tangente T es una función vectorial asociada a la curva C y se define como

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||}, \quad \text{si } ||r'(t)|| \neq 0$$

Ejemplo 3.33

- La pendiente de la recta tangente en P en la dirección de $\vec{u} = (1,1)$ es

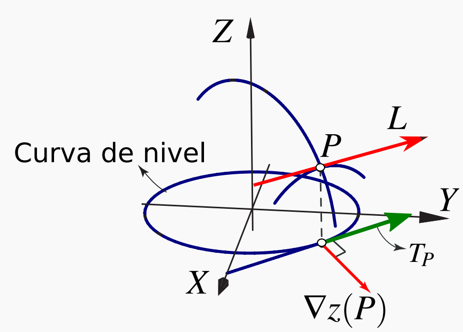
$$D_{(1,1)}z(P) = \nabla z(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$



- El gradiente $\nabla z(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ en P. La derivada direccional en la dirección del vector unitario tangente es cero. Geométricamente, la recta L, en la figura que sigue, tiene pendiente cero.

  Esto es así pues si $\overrightarrow{T_P}$ es el vector unitario tangente a la curva de nivel $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ en $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, entonces

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{T_P}} f(P) &= \nabla f(P) \cdot \overrightarrow{T_P} = 0 \quad \text{(¿porqué?)} \\ &= ||\nabla f(P)|| \cos\theta = 0 \end{aligned}$$



  lo cual implica que $\theta = \pi/2$.

3.11 Plano tangente y el vector normal.

Si f es diferenciable, entonces el plano tangente a $z = f(x,y)$ en $P = (x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ tiene ecuación

$$f_x(x_0,\, y_0)\,(x-x_0)+f_y(x_0,\, y_0)\,(y-y_0) \;=\; z-z_0$$

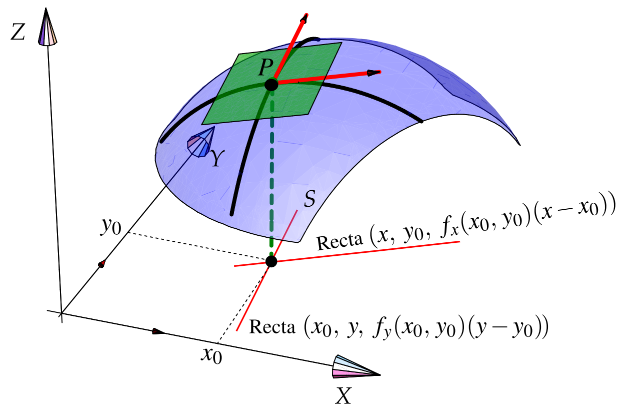


Figura 3.16: Plano tangente a $z = f(x,y)$ en P si f es diferenciable.

Caso general. Podemos obtener la ecuación cartesiana del plano tangente (si existe) usando un vector normal a la superficie $S: G(x,y,z) = 0$. Si G es derivable con continuidad en $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y si el gradiente en P es no nulo, los vectores tangentes a cada curva en S que pasan por P están en el *plano tangente* a esta superficie en P y $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a este plano.

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

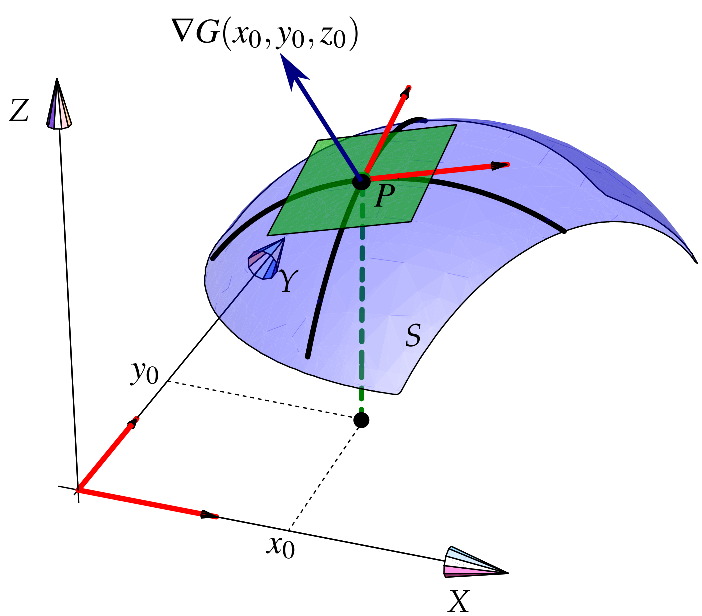


Figura 3.17: $\nabla G(P)$ es perpendicular al plano tangente a S en P.

Así, una ecuación del plano tangente en P es

$$ax + by + cz = d \quad \text{con} \quad (a,b,c) = \nabla G(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad d = \nabla G(x_0, y_0, z_0) \cdot P.$$

(Plano Tengente)

- Si S tiene ecuación $z = f(x,y)$ con f diferenciable, el plano tangente en $P \in S$ tiene ecuación cartesiana

$$f_x(x_0,\, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,\, y_0)\,(y - y_0) \;=\; z - z_0$$

- Si la superficie S tiene ecuación $G(x,y,z) = 0$ con G diferenciable, el plano tangente en $P \in S$ tiene ecuación cartesiana

$$G_x(P)\,x \;+\; G_y(P)\,y \;+\; G_z(P)\,z = \nabla G(P) \cdot P$$

Ejemplo 3.34

Sea S la superficie de ecuación $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Aunque $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, no hay plano tangente pues la función es discontinua en este punto (aunque esté definida).

Ejemplo 3.35

Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2$. Obtener una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P = (1,1,3)$.

Solución:

Primera manera. En este caso $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = 4y$. Entonces una ecuación cartesiana sería,

$$f_x(1,1)\,(x-1) + f_y(1,1)\,(y-1) \;=\; z - 3,$$

es decir,

$$2(x-1) + 4\,(y-1) \;=\; z - 3,$$

Otra manera. Sea $S:\; G(x,y,z) = z - x^2 - 2y^2 = 0$. Entonces un vector normal al plano tangente a S en P es $\nabla G = (-2x,\, -4y,\, 1)$. Ahora, $\nabla G(1,1,3) = (-2,-4,1)$, entonces una ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} -2x - 4y + 1\,z &= \nabla G(1,1,3) \cdot P \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.36

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. Sea $P=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\in S$. Calculemos la ecuación cartesiana del plano tangente en P.

- La ecuación de S es $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$.
- $\nabla G(x,y,z)=(2x,2y,2z)$.
- $N=\nabla G(P)=(2/\sqrt{3},2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$ y $d=P\cdot\nabla G(P)=2$
- Una ecuación cartesiana del plano tangente: $\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}y+\frac{2}{\sqrt{3}}z=2$ o también $x+y+z=\sqrt{3}$.

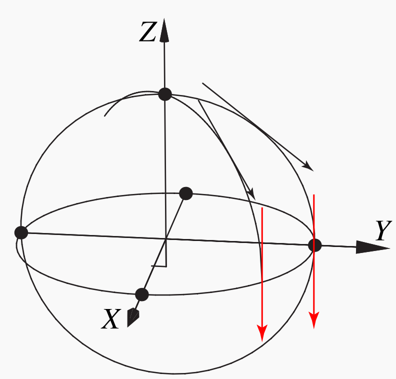
Ejemplo 3.37

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. y $P=(0,1,0)\in S$. Calcule la ecuación del plano tangente a S en P.

Solución: Sea $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. Entonces $\nabla G(x,y,z)=(2x,2y,2z)$. Por tanto un vector normal es $N=G(0,1,0)=(0,2,0)$

La ecuación cartesiana del plano tangente a S en P es $0\cdot x+2\cdot y+0\cdot z=2$, es decir $y=1$.

Observe que en este punto, como $\nabla z(x,y)=\left(-\frac{x}{z},-\frac{x}{z}\right)$, la derivada direccional no existe.



Ejemplo 3.38

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. Encuentre los puntos $Q=(a,b,c)\in S$ tal que el plano tangente en Q sea paralelo al plano $2x-y+3z=1$.

Solución: Q tiene tres incógnitas así que necesitamos, en principio, tres ecuaciones.

- Como $Q\in S$, esto nos da una ecuación: $a^2+b^2+c^2=1$.
- Como el plano tangente en Q es paralelo al plano $2x-y+3z=1$, sus vectores normales deben ser paralelos,

es decir

$$\nabla G(Q) = \lambda\,(2,-1,3)$$

esto nos da tres ecuaciones adicionales y una incógnita más, λ.

- Para encontrar Q solo debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ \nabla G(Q) &= \lambda\,(2,-1,3) \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ (2a,2b,2c) &= \lambda\,(2,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ 2a &= 2\lambda \\ 2b &= -\lambda \\ 2c &= 3\lambda \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos las dos soluciones

$$Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right), \text{ y } Q = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

13 Ejercicios

3.37 Sea $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ la ecuación de una superficie S.

a.) Calcule $D_{\vec{u}}f(Q)$ si $\vec{u} = (-2,1)$ y $Q = (1,1,2)$ es un punto en la superficie.

b.) Determine el punto $P = (a,b,c) \in S$ para el cual la derivada direccional de f en P es $\sqrt{2}$ en dirección de $\vec{u} = (-2,1)$ y $\sqrt{5}$ en la dirección de $\vec{v} = (1,1)$.

c.) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R = (1,-1,2) \in S$.

d.) Determine un vector $\vec{u}$ para el cual la derivada direccional en $R = (1,-1,2) \in S$ es máxima y calcule su valor.

3.38 Sea $x^2 + xyz + z^3 = 1$ la ecuación de una superficie S.

a.) Calcule $D_{\vec{u}}z(Q)$ si $u = (-2,1)$ y $Q = (1,2,0) \in S$

b.) Determine $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que en $P = (1,b,0) \in S$ y $D_{\vec{u}}z(P) = \sqrt{2}$.

c.) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R = (1,-1,1) \in S$.

d.) Determine un vector $\vec{u}$ para el cual la derivada direccional en $R = (1,-1,1) \in S$ es mínima y calcule su valor.

3.39 Considere la superficie S de ecuación $z^3 + xz + y = 1$. $\boldsymbol{P} = (1,1,0) \in S$

a.) Calcule $D_{\vec{u}}z(\boldsymbol{P})$ donde $\vec{\boldsymbol{u}} = (1,-2)$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en $\boldsymbol{P}$ y en cuál dirección $\vec{\boldsymbol{v}}$ se alcanza?

c.) Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto $\boldsymbol{P}$

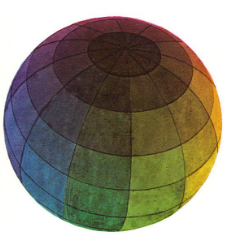
3.40 Considere la superficie S de ecuación $xyz^2 = 8z$. $\boldsymbol{P} = (1,1,8) \in S$

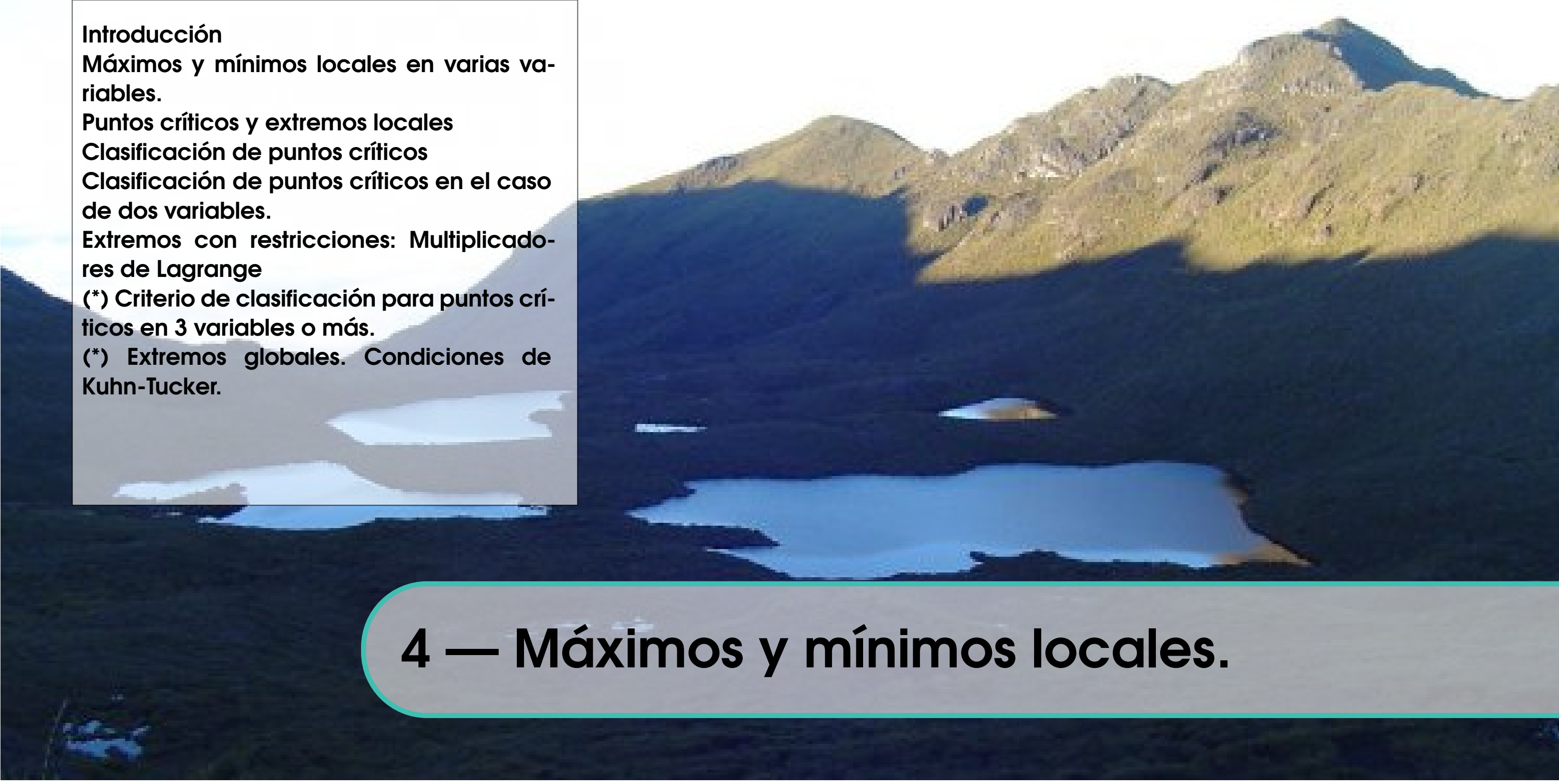
a.) Calcule $D_{\vec{u}}z(\boldsymbol{P})$ donde $\vec{\boldsymbol{u}} = (-5,\sqrt{2})$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en $\boldsymbol{P}$ y en cuál dirección $\vec{\boldsymbol{v}}$ se alcanza?

c.) Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto $\boldsymbol{P}$

3.41 Calcule la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie $S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$





4 — Máximos y mínimos locales.

4.1 Introducción

¿Por qué, en una variable, un punto crítico $\boldsymbol{p}$ es máximo local si $f''(\boldsymbol{p}) < 0$?

En una variable, los puntos críticos de f son los puntos $x = \boldsymbol{p}$ en los que $f'(\boldsymbol{p}) = 0$ (o en los que f' se indefine). Muchas veces se puede clasificar este punto crítico con el signo de $f''(\boldsymbol{p})$. Esto se puede establecer usando polinomios de Taylor. Según el teorema de Taylor, en los alrededores de $x = \boldsymbol{p}$,

$$f(\boldsymbol{p}+h) = f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})h + \frac{f''(\boldsymbol{p})}{2}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\boldsymbol{p})}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)\,h^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \text{ entre } \boldsymbol{p} \text{ y } h.$$

En particular, si $x = \boldsymbol{p}$ es un punto crítico de f,

$$f(\boldsymbol{p}+h) - f(\boldsymbol{p}) = \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \quad \text{con } \xi \text{ entre } \boldsymbol{p} \text{ y } h.$$

Si f'' es continua y $f''(\boldsymbol{p}) \neq 0$, entonces hay un entorno alrededor de $\boldsymbol{p}$ donde f'' conserva el signo. Si h es sufientemente pequeño, $\boldsymbol{p}+h$ está en este entorno y $f''(\boldsymbol{p})$, $f''(\xi)$ y por tanto $f(\boldsymbol{p}+h) - f(\boldsymbol{p})$, tienen todos el mismo signo; por esto el signo de $f(\boldsymbol{p}+h) - f(\boldsymbol{p})$ es el signo de $f''(\boldsymbol{p})$ si h es suficientemente pequeño.

Se concluye que si $f''(\boldsymbol{p}) > 0$ entonces $f(\boldsymbol{p}+h) > f(\boldsymbol{p})$ y en $x = \boldsymbol{p}$ f alcanza un mínimo local y si $f''(\boldsymbol{p}) < 0$ entonces $f(\boldsymbol{p}+h) < f(\boldsymbol{p})$ y en $x = \boldsymbol{p}$ f alcanza un máximo local.

Interpretación geométrica. Observe que le signo de $f''(\boldsymbol{p}) \neq 0$ decide la concavidad del polinomio de Taylor

$$T_2(x) = f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(x-h) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-h)^2.$$

Y esta concavidad coincide con la naturaleza del punto crítico.