

Integral doble.  
 Cálculo de integrales dobles. Integral ite-  
 rada.  
 Área y Volumen  
 Cambio de variable en una integral doble.  
 Integral triple.  
 Cambio de variables en integral triple.  
 Coordenadas cilíndricas.  
 Coordenadas esféricas.  
 Describiendo Superficies en Coordena-  
 das Esféricas.  
 Cambio de variable con coordenadas  
 esféricas.  
 Singularidades.

## 5 — Integral doble e integral triple.

### 5.1 Integral doble.

Sea  $R$  es una región acotada y cerrada del plano, de área  $A(R)$  y sea  $f : R^2 \rightarrow R$  una función definida y acotada sobre  $R$ . Supongamos que  $M_R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  es un conjunto de  $n$  celdas que conforman una *mall*a que cubre  $R$  (ver figura). El área de cada celda  $R_i$  la denotamos con  $\Delta A_i$ .

Una suma de Riemann de  $f$  sobre  $R$  es una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

donde  $(x_i, y_i) \in R_i$ .

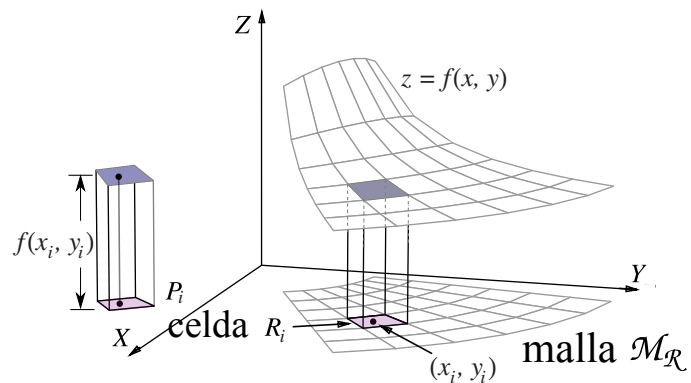
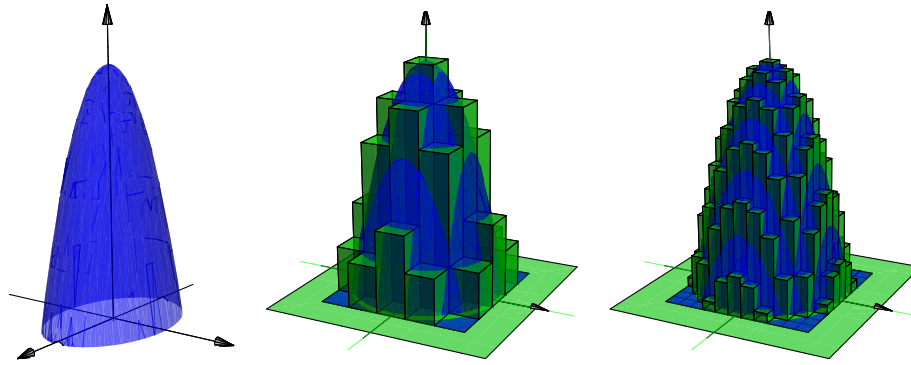


Figura 5.1

Si  $f$  es continua y positiva sobre  $R$ , entonces  $f(x_i, y_i) \Delta A_i$  aproxima el volumen de cada prisma  $P_i$  de base  $R_i$  y altura  $f(x_i, y_i)$ ; en este caso la suma de Riemann aproxima el volumen del sólido entre la región  $R$  y el gráfico de  $f$ .



**Figura 5.2:** Si  $f$  es continua y positiva sobre  $R$ , la suma de Riemann aproxima el volumen del sólido.

**Diámetro de la malla.** El *diámetro* de cada celda  $R_i$  es la máxima distancia entre todas las distancias entre cualesquiera dos puntos en  $R_i$  y se denota  $\|R_i\|$ . El *diámetro* de la malla  $M_R$  es  $\|M_R\| = \text{Sup}_i\{\|R_i\|\}$  y  $n := C(M)$ .

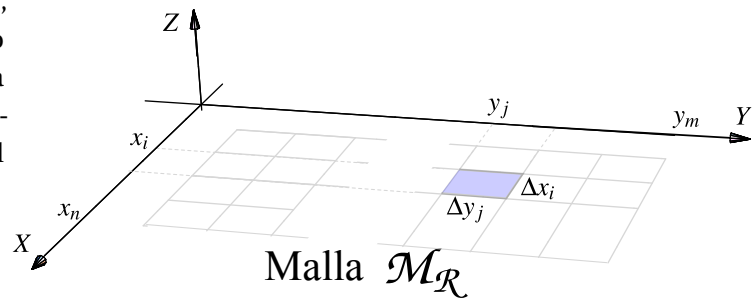
**Definición 5.1 (Función integrable).**

Si las sumas de Riemann de  $f$  sobre  $M_R$  tienen un límite, independiente de la escogencia de los  $(x_i, y_i)$ , conforme  $\|M_R\| \rightarrow 0$ , entonces decimos que  $f$  es *integrable* sobre  $R$  y que la integral es este límite. En este caso escribimos,

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|M\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{C(M)} f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

En el caso de que  $R$  sea una región rectangular, la malla  $M_R$  se puede tomar como un conjunto de rectángulos  $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  de área  $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ . En este caso es natural reemplazar el elemento de área  $dA$  por  $dx dy$  y escribir el límite como,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\|n, m \rightarrow \infty\|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$



**Figura 5.3**

Las propiedades de las funciones integrables en dos variables son similares a las propiedades de las funciones integrables en una variable.

**Teorema 5.1 (Propiedades de las funciones integrables).**

- a.) Si  $f$  es continua sobre  $R$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $R$ .
- b.) Sea  $k \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $R$ , entonces  $kf$  y  $f \pm g$  son integrables sobre  $R$  y

$$\iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA \quad \text{y} \quad \iint_R f(x, y) \pm g(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

c.) Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre regiones  $R$  y  $S$  que no se traslapan, entonces  $f$  es integrables sobre  $R \cup S$  y

$$\iint_{R \cup S} f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_S f(x, y) dA$$

d.) Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $R$  y  $f(x, y) \leq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

e.) Si  $f$  es integrable sobre  $R$  y  $M \leq f(x, y) \leq m$  para todo  $(x, y) \in R$ , entonces

$$MA(R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq mA(R)$$

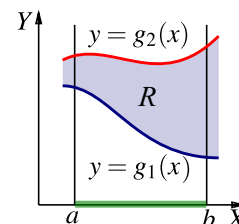
**Otros tipos de integración.** El concepto de integral que hemos visto es el concepto de integral en el sentido de Riemann y es suficiente para los cálculos y las aplicaciones en este libro. Para otros propósitos esta integral no es adecuada y se requiere definir un tipo más general de integración, por ejemplo la integral en el sentido Lebesgue. Una diferencia esencial entre una integral y otra es la manera en que se *mide* los conjuntos de puntos. La integral de Riemann usa medida de Jordan y la de Lebesgue, medida de Lebesgue.

## 5.2 Cálculo de integrales dobles. Integral iterada.

**Integrales iteradas.** El teorema de Fubini establece que si  $f$  es continua sobre  $R$ , la integral doble se puede evaluar por “integración parcial” respecto a cada variable, una a la vez. Este es el método de “integrales iteradas”. Primero debemos especificar dos maneras de describir una misma región.

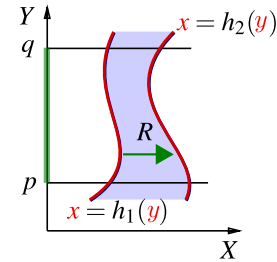
● Región entre las curvas  $y = g_1(x)$  y  $y = g_2(x)$ .

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } a \leq x \leq b \text{ y } g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$   
con  $g_1$  y  $g_2$  funciones continuas en  $[a, b]$ .



- Región entre las curvas  $x = h_1(y)$  y  $x = h_2(y)$ .

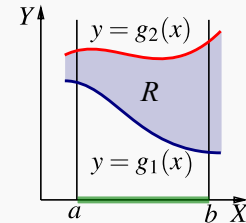
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } p \leq y \leq q \text{ y } h_2(y) \leq x \leq h_1(y)\}$   
con  $h_1$  y  $h_2$  funciones continuas en  $[p, q]$ .



### Teorema 5.2 (Fubini).

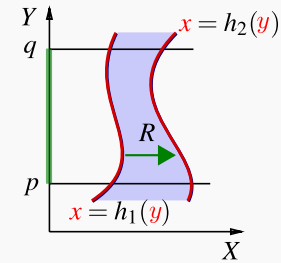
Sea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } a \leq x \leq b \text{ y } g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$  con  $g_1$  y  $g_2$  funciones continuas en  $[a, b]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



Sea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } p \leq y \leq q \text{ y } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  con  $h_1$  y  $h_2$  funciones continuas en  $[p, q]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_p^q \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_p^q \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



### Ejemplo 5.1

Sea  $R$  la región de la figura. Vamos a calcular  $\iint_R xy dA$  usando el orden de integración “ $dy dx$ ” y el orden de integración “ $dx dy$ .”

Observe que  $R$  se puede describir como

$$R : 0 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{2} \leq y \leq x$$

$$R : 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq \sqrt{2y}.$$

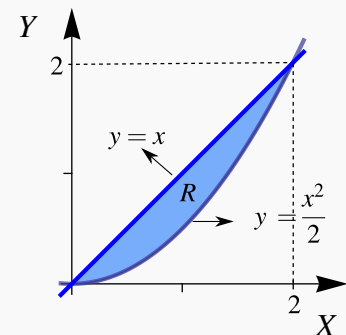
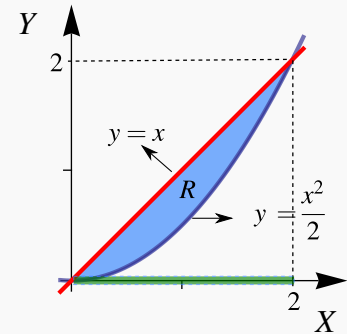


Figura 5.4: Región  $R$

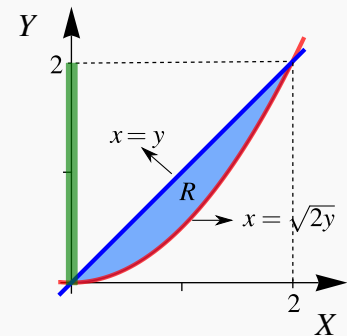
- Integrando en el orden “ $dy dx$ ”

$$\begin{aligned}
 \iint_R xy \, dA &= \int_0^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{2}}^x xy \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^2 \left[ x \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x \right] dx \\
 &= \int_0^2 \left[ x \frac{x^2}{2} - x \frac{x^4}{8} \right] dx = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Figura 5.5: Integrando en el orden “ $dy \, dx$ ”

● Integrando en el orden “ $dx \, dy$ ”

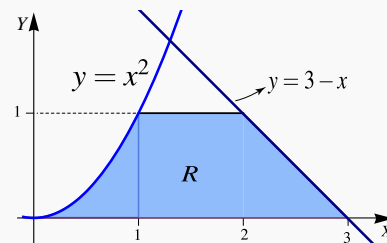
$$\begin{aligned}
 \iint_R xy \, dA &= \int_0^2 \left[ \int_y^{\sqrt{2y}} xy \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} y \Big|_y^{\sqrt{2y}} dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \frac{2y}{2} y - \frac{y^2}{2} y \right] dy = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Figura 5.6: Integrando en el orden “ $dx \, dy$ ”

### Ejemplo 5.2

En este ejemplo se muestra como el número de regiones de integración puede variar, de acuerdo a la elección del orden de integración.

Considere la integral  $I = \iint_R x^2 + y^2 \, dA$ , donde  $R$  es la región de la figura. Vamos a calcular esta integral doble, usando el orden de integración “ $dy \, dx$ ” y el orden de integración “ $dx \, dy$ .”

Figura 5.7: Región  $R$ 

● Orden “ $dy \, dx$ ”: en este caso  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . La manera de ver la región es como sigue,

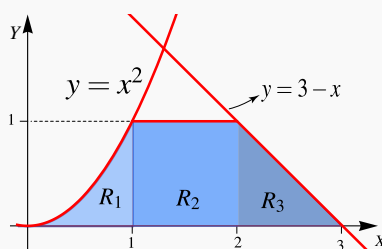


Figura 5.8: Región  $R$  con  $x$  como variable independiente

$$\begin{aligned}
 \iint_R x^2 + y^2 dA &= \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} x^2 + y^2 dy \right] dx + \int_1^2 \left[ \int_0^1 x^2 + y^2 dy \right] dx + \int_2^3 \left[ \int_0^{3-x} x^2 + y^2 dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 dx + \int_2^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{3-x} dx \\
 &= \int_0^1 x^4 + \frac{x^6}{3} dx + \int_1^2 \frac{1}{3} + x^2 dx + \int_2^3 9 - 9x + 6x^2 - \frac{4x^3}{3} dx = \frac{1207}{210}
 \end{aligned}$$

● Orden “ $dx dy$ ”

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[ \int_{\sqrt{y}}^{3-y} x^2 + y^2 dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_{\sqrt{y}}^{3-y} \right] dy \\
 &= \int_0^1 9 - 9y - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + 6y^2 - y^{\frac{5}{2}} - \frac{4y^3}{3} dy \\
 &= \frac{1207}{210}
 \end{aligned}$$

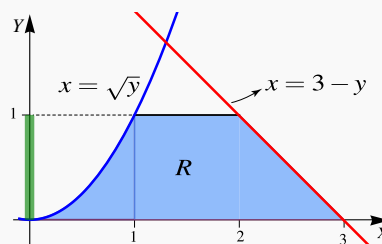


Figura 5.9: Región  $R$  con  $y$  como variable independiente

### Ejemplo 5.3

Considere la integral  $I = \int_0^1 \int_{-x^3}^x f(x, y) dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^x f(x, y) dy dx$ . Dibuje la región de integración y re-escriba la integral en el orden “ $dx dy$ .”

**Solución:** La región de integración en la primera integral es  $0 \leq x \leq 1$  y  $x \leq y \leq -x^3$ . La región de integración en la segunda integral es  $1 \leq x \leq 4$  y  $x \leq y \leq x - 2$ .

En la figura aparece la región de integración. Si  $y$  es la variable independiente,  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ .

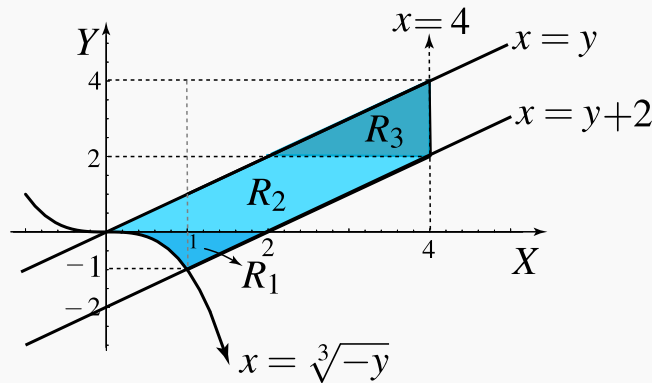


Figura 5.10: Región  $R$  con  $y$  como variable independiente

● Orden “ $dx dy$ ”

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_3} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA + \iint_{R_1} f(x, y) dA \\ &= \int_2^4 \int_y^4 f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_y^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt[3]{y}}^{y+2} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.4

Sea  $I = \int_{-2}^{-1} \int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dy dx + \int_{-1}^0 \int_{x+1}^{x+6} dy dx$ .

- Dibuje la región de integración.
- Plantear la integral o las integrales que corresponden a  $I$  invirtiendo el orden de integración.

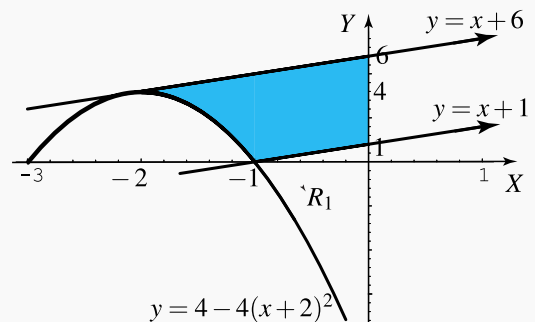


Figura 5.11: Región de integración.

**Solución:** La región es

$$R : \begin{cases} 4 - 4(x+2)^2 \leq y \leq x+6 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x+1 \leq y \leq x+6 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Para integrar en el orden “ $dx dy$ ” hay que partir la región en tres subregiones  $R_1, R_2, R_3$ .

$$\begin{cases} R_1 : -2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2} \leq x \leq y-1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ R_2 : -2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2} \leq x \leq 0 & \text{si } 1 \leq y \leq 4 \\ R_3 : y-6 \leq x \leq 0 & \text{si } 4 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

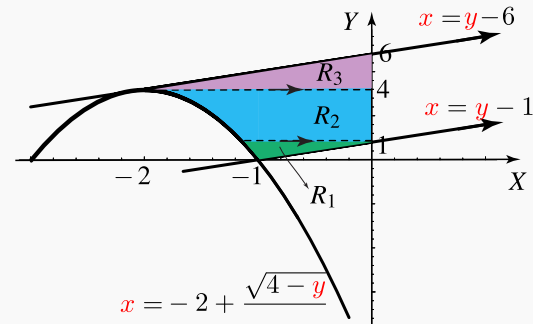


Figura 5.12: Región de integración.

Luego,

$$I = \int_0^1 \int_{-2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{y-1} dx dy + \int_1^4 \int_{-2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2}}^0 dx dy + \int_4^6 \int_{y-6}^0 dx dy$$

### 5.3 Área y Volumen

- De acuerdo con nuestra definición de integral doble, El área  $A_R$  de una región  $R$  se puede calcular con la integral doble (“área de la base  $\times$  altura”)

$$A_R = \iint_R 1 dx dy = \iint_R 1 dy dx$$

- Sea  $f(x, y) \geq 0$  y continua en una región cerrada  $R$ . Sea  $V_Q$  el volumen del sólido  $Q$  que tiene a  $R$  como base y una altura de medida  $f(x, y)$  en cada  $(x, y) \in R$ , entonces

$$V_Q = \iint_R f(x, y) dA$$

- Si el sólido  $Q$  está limitado, sobre la región  $R$ , por dos superficies de ecuaciones  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  con  $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$  sobre  $R$ , entonces

$$V_Q = \iint_R f(x, y) - g(x, y) dA$$



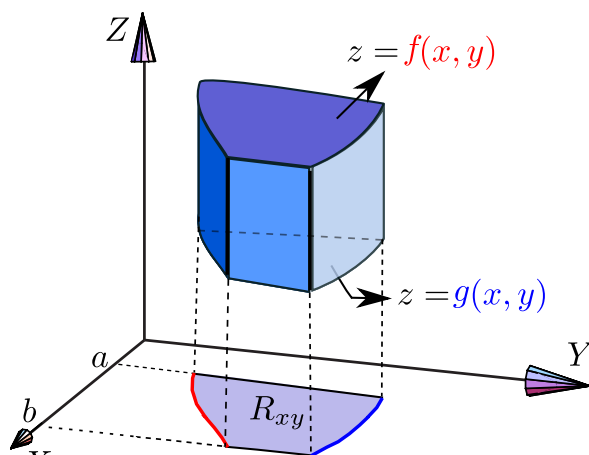


Figura 5.13: Proyección sobre el plano  $XY$

- Muchas veces es conveniente considerar como la región  $R$  la proyección del sólido sobre los planos  $XZ$  o  $YZ$ .

### Ejemplo 5.5

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $z = 1 - x^2$ , y  $x + y = 1$  en el primer octante. Calcule  $V_Q$  usando como región  $R$  cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos  $XY$ ,  $YZ$ ,  $XZ$ .

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

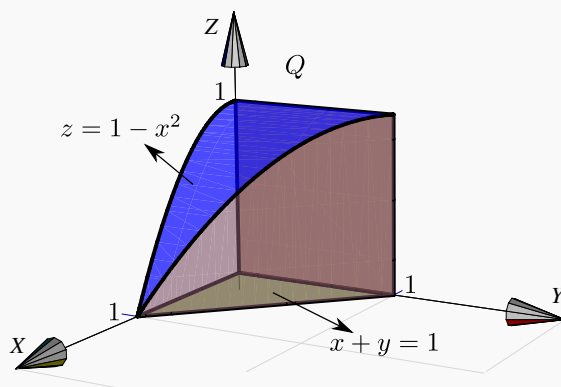


Figura 5.14: Sólido  $Q$

**Solución:**

- **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XZ$ .** La proyección sobre el plano  $XZ$  se muestra en la figura. La región está entre la curva  $C_2 : z = 1 - x^2$  y el eje  $X$ .

Desde el punto de vista del plano  $XZ$ , el sólido está limitado por las superficies  $x = 0$  y  $y = 1 - x$ . Integrando en el orden “ $dz dx$ ” queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 1-x-0 \, dz dx \\ &= \int_0^1 z-zx \Big|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)(1-x^2) dx = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

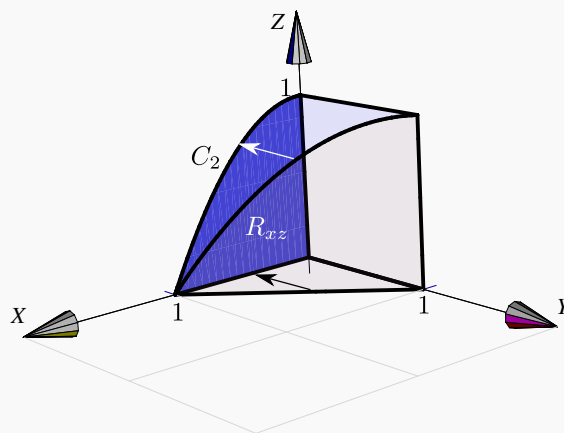


Figura 5.15: Proyección sobre  $XZ$

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XY$ .** La proyección sobre el plano  $xy$  se muestra en la figura

La ecuación de la curva  $C_3$  corresponde a  $y = 1 - x$

con  $x \in [0, 1]$ . Desde el punto de vista del plano  $XY$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $z = 1 - x^2$  y  $z = 0$ .

Integrando en el orden “ $dy dx$ ” queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x^2-0 \, dy dx \\ &= \int_0^1 1-x-x^2(1-x) dx = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

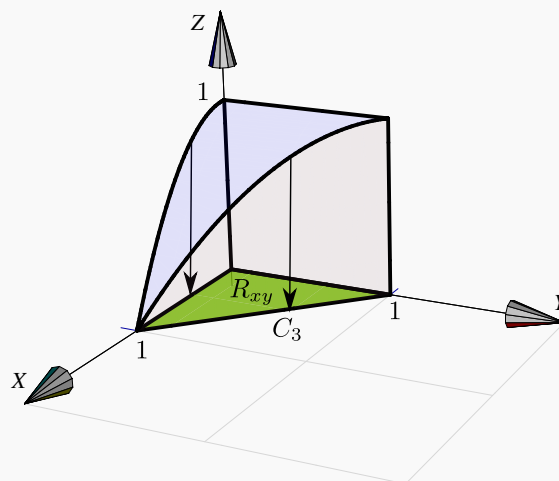
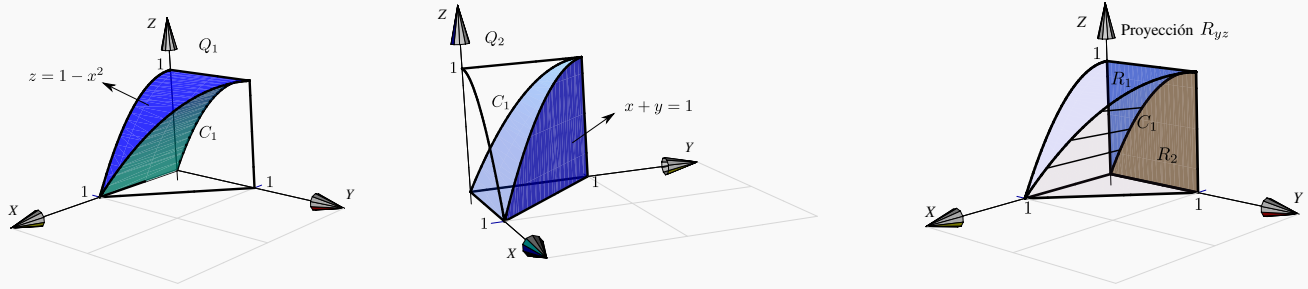


Figura 5.16: Proyección sobre  $XY$

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $YZ$ .** En este caso, el sólido no está entre dos superficies. Desde el punto de vista del plano  $YZ$ , tenemos un sólido  $Q_1$  que está entre  $x = 0$  y  $z = 1 - x^2$  en la región  $R_1$  y un sólido  $Q_2$  que está entre  $x = 0$  y el plano  $x + y = 1$  en  $R_2$ . Además,  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , como se muestra en la figura, y entonces

$$V_Q = V_{Q_1} + V_{Q_2}$$



La proyección sobre este plano se muestra en la figura. La curva de proyección  $C_1$  es la proyección sobre  $YZ$  de la curva de intersección entre la superficie  $z = 1 - x^2$  y el plano  $x + y = 1$ .  $C_1$  tiene ecuación en términos de  $x$  e  $y$ .

$$z = 1 - x^2 \cap x + y = 1 \implies z = 1 - (1 - y)^2, \quad y \in [0, 1]$$

La curva  $C_1$  divide la región de integración en dos partes, la región  $R_1$  y la región  $R_2$ .

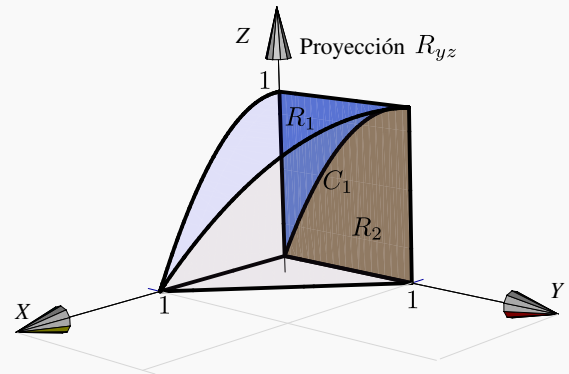


Figura 5.17: Proyección sobre  $YZ$

Desde el punto de vista del plano  $YZ$ , el sólido está limitado por las superficies

- $x = \sqrt{1 - z}$  y  $x = 0$  sobre  $R_1$ .
- $x = 1 - y$  y  $x = 0$  sobre  $R_2$ .

Integrando en el orden " $dz dy$ " queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \sqrt{1-z} - 0 \, dz \, dy + \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} 1-y - 0 \, dz \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-2y+y^2)^{3/2}}{3} \, dy + \int_0^1 (2y-3y^2+y^3) \, dy = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

**Nota:**  $(1 - 2y + y^2)^{3/2} = \sqrt{(y-1)^6} = |(y-1)^3| = -(y-1)^3$  si  $y \in [0, 1]$ .

## Ejemplo 5.6

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $x + y = 5$ ,  $z = 2$ ,  $y = z = 0$ .

Plantear la o las integrales dobles necesarias para calcular  $V_Q$  usando como región  $R$  cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos  $YZ$ ,  $XZ$ ,  $XY$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

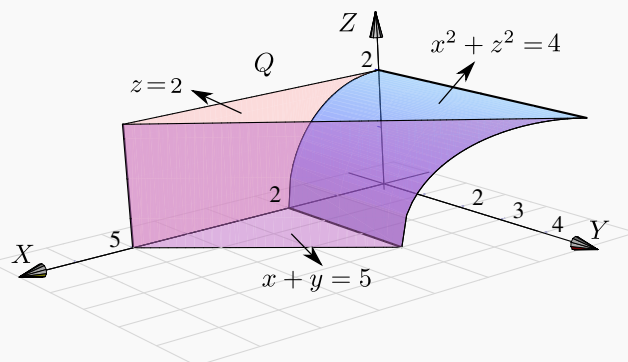


Figura 5.18: Sólido  $Q$

**Solución:**

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XZ$ .**

La proyección  $R_{yz}$  sobre el plano  $xz$  se muestra en la figura. La ecuación de la curva  $C_2$  corresponde a  $x^2 + z^2 = 4$  con  $x \in [0, 2]$ .

Sobre la región  $R_{yz}$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $y = 0$  (abajo) y  $y = 5 - x$  (arriba).

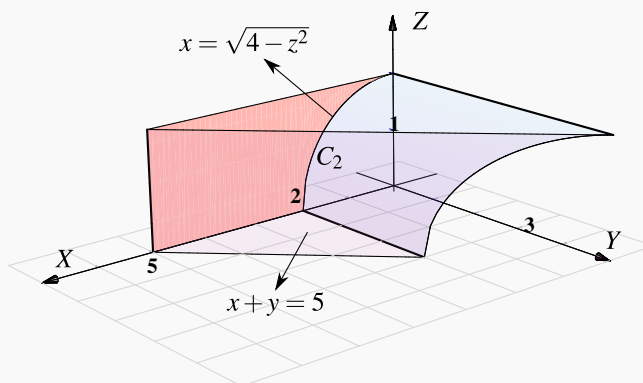


Figura 5.19: Proyección sobre  $XZ$

Usando el orden de integración " $dx dz$ " tenemos

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-z^2}}^5 5-x-0 \, dx \, dz \\
 &= \int_0^2 \left[ \frac{29}{2} - \frac{z^2}{2} - 5\sqrt{4-z^2} \right] dz \\
 &= \left[ \frac{29z}{2} - \frac{z^3}{6} - \frac{5z\sqrt{4-z^2}}{2} - 10 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right) \right]_0^2 = \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587
 \end{aligned}$$

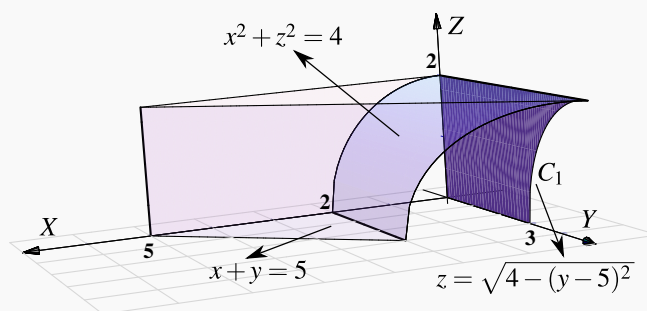
**Nota:** Utilizando la sustitución trigonométrica  $\frac{z}{2} = \sin\theta$ , se obtiene (salvo constantes)

$$\int \sqrt{4-z^2} \, dz = \frac{z\sqrt{4-z^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right).$$

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $YZ$ .**

La proyección  $R_{yz}$  sobre el plano  $yz$  se muestra en la figura. Para hallar la ecuación de la curva  $C_1$  observe que esta curva está arriba del eje  $y$  por lo que:

$$C_1: x^2 + z^2 = 4 \cap x + y = 5 \implies \begin{cases} z = +\sqrt{4-(5-y)^2} & \text{si } y \in [3,5] \\ 0 & \\ y = 5 - \sqrt{4-z^2} & \text{si } z \in [0,2] \end{cases}$$



**Figura 5.20:** Proyección sobre  $YZ$

Sobre la región  $R_{yz}$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $x = \sqrt{4-z^2}$  (abajo) y  $x = 5-y$  (arriba).

Usando el orden de integración " $dy \, dz$ " tenemos

$$V_Q = \int_0^2 \int_0^{5-\sqrt{4-z^2}} 5-y-\sqrt{4-z^2} dy dz = \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587$$

● Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XY$ .

La proyección sobre el plano se muestra en la figura. La ecuación de la curva  $C_3$  corresponde a  $y = 5 - x$  con  $x \in [0, 5]$ . Esta curva divide la región de integración en dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ . El sólido  $Q$  está limitado por las superficies

- $z = \sqrt{4-x^2}$  (abajo) y  $z = 2$  (arriba) sobre  $R_1$
- $z = 0$  (abajo) y  $z = 2$  (arriba) sobre  $R_2$

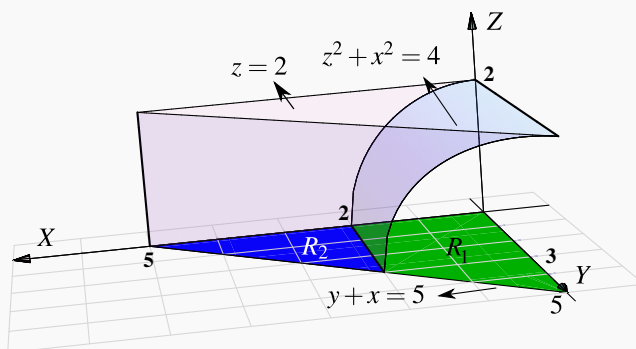


Figura 5.21: Proyección sobre  $XY$

Usando el orden de integración " $dy dx$ " tenemos

$$V_Q = \int_0^2 \int_0^{5-x} 2 - \sqrt{4-x^2} dy dx + \int_2^5 \int_0^{5-x} 2 - 0 dy dx = \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587$$

**Ejemplo 5.7**

El sólido  $Q$  está limitado por las superficies  $4z = x^2 + y^2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 1$ ,  $z = 4$ , y  $x = 0$ .

- a.) Dibuje la región de integración en el plano  $yz$ .
- b.) Plantee la o las integrales correspondientes al volumen del sólido utilizando la proyección del ítem anterior.

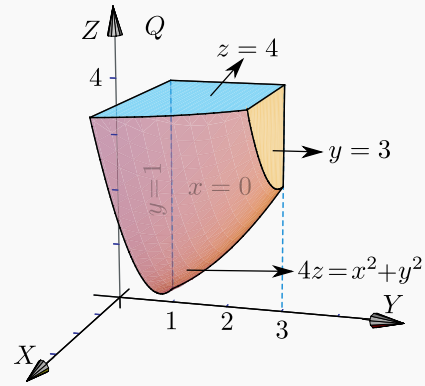


Figura 5.22: Sólido  $Q$ .

**Solución:** La región de integración aparece en la figura.

$$V_Q = \int_1^3 \int_{y^2/4}^4 \sqrt{4z - y^2} - 0 \, dz \, dy$$

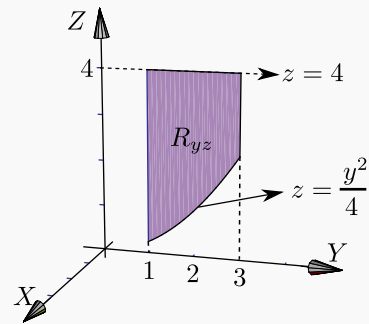
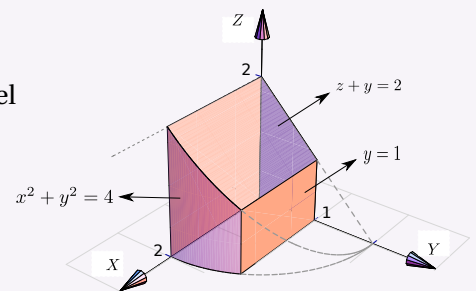


Figura 5.23: Sólido  $Q$ .

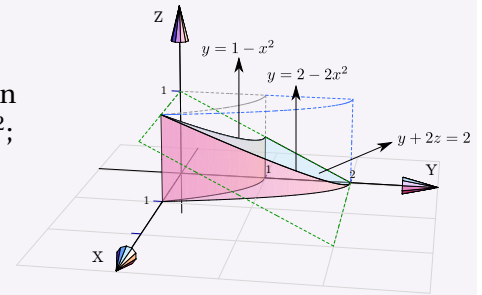
**19 Ejercicios**

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

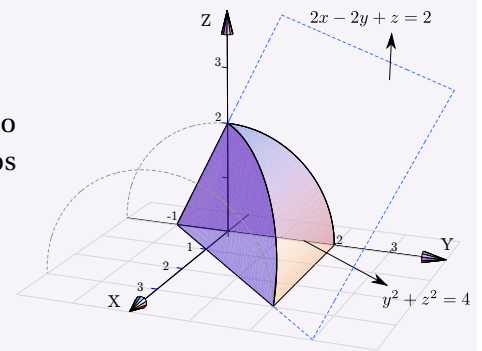
**5.1 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $z + y = 2$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el I octante



**5.2 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ ; en el I octante.

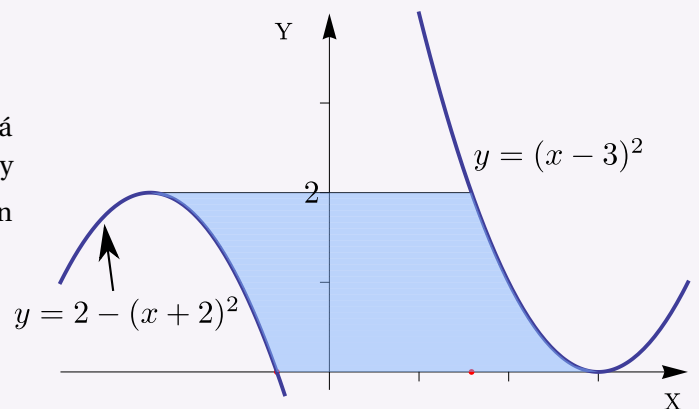


**5.3 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el volumen sólido  $Q$  si este sólido está limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 4$  y los planos  $2x - 2y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .



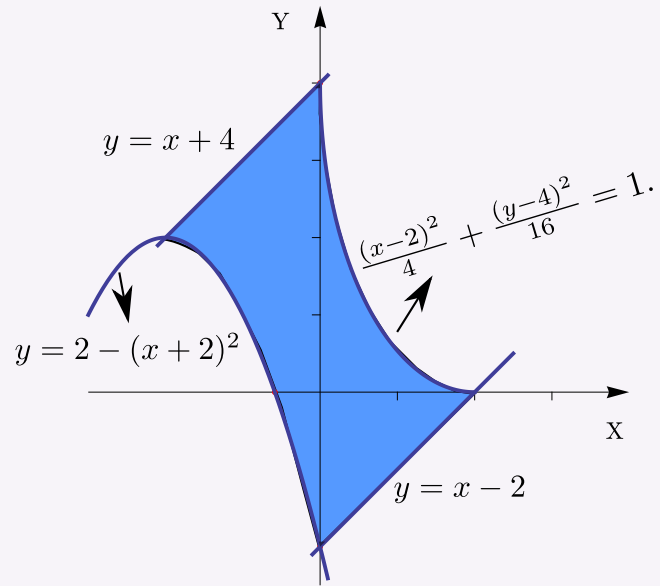
**5.4** El área de la región  $R_{xy}$  viene dada por  $\int_0^1 \int_0^y dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} dx dy$ . Dibuje la región  $R_{xy}$  y calcule la integral en el orden  $dy dx$ .

**5.5** Considere la región  $R$  a la derecha. Esta región está limitada por las curvas  $y = 0$ ;  $y = 2$ ;  $y = 2 - (x + 2)^2$  y  $y = (x - 3)^2$ . Plantear la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  en el orden “ $dx dy$ ” y en el orden “ $dy dx$ ”





**5.6** Considere la región  $R$  (figura a la derecha). Esta región está limitada por las curvas  $y = x + 4$ ;  $y = x - 2$ ;  $y = 2 - (x + 2)^2$  y  $(x - 2)^2/4 + (y - 4)^2/16 = 1$ . Plantear la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  en el orden “ $dx dy$ ” y en el orden “ $dy dx$ ”



## 5.4 Cambio de variable en una integral doble.

En una variable, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $x = x(u)$  está definida en  $[u_1, u_2]$  y tiene una derivada continua, con  $a = x(u_1)$  y  $b = x(u_2)$  y si  $f(x(u))$  es continua en  $[u_1, u_2]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad (*)$$

La inversa  $u = u(x)$  existe solo si  $x(u)$  es estrictamente creciente o decreciente, pero no es una condición que se pida en la fórmula (\*).

Hay una fórmula análoga a (\*) para integrales dobles;

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad \text{con} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Se asume que las funciones  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  están definidas y tienen derivadas parciales continua en la región de integración  $R_{uv}$  en el plano  $uv$ . En este caso si se asume que las funciones inversas  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  están definidas y son continuas en  $R_{xy}$  y que *hay un mapeo invertible* entre el interior de  $R_{xy}$  y el interior de  $R_{uv}$ . La función  $f(x, y)$  se asume continua en  $R_{xy}$  y así  $f(x(u, v), y(u, v))$  es continua en  $R_{uv}$ . También se asume que el **Jacobiano**

$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  es no nulo en el interior de  $R_{uv}$ .

La restricción de que el cambio de variable sea invertible en el interior de  $R_{xy}$  (y por tanto que  $J(u, v)$  no se anule en el interior de  $R_{uv}$ ) es necesaria para poder usar cambio de variable con coordenadas polares en regiones que contienen el origen.

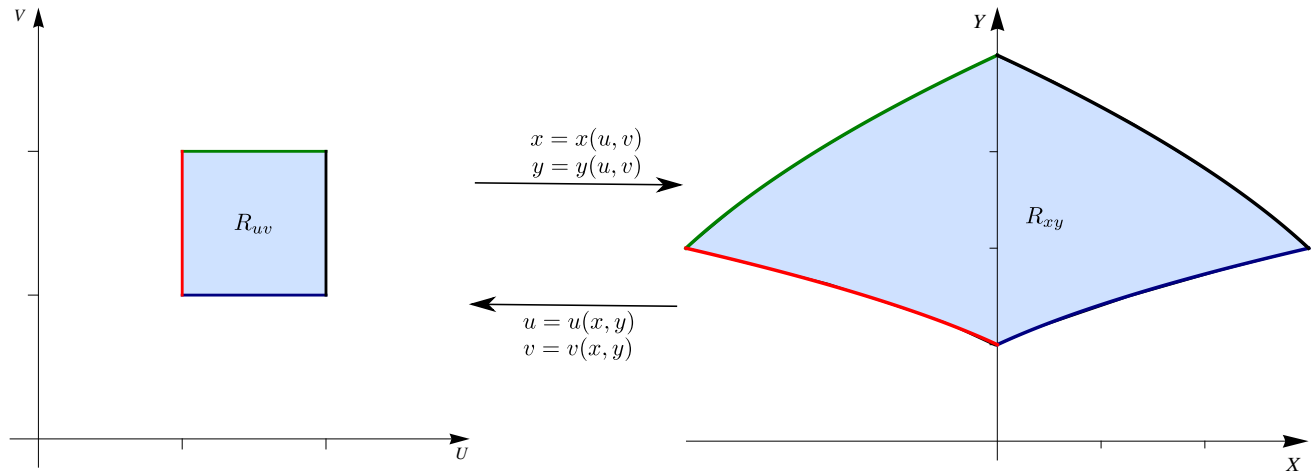


Figura 5.24: Cambio de variable

### Teorema 5.3 (Cambio de variable).

Sea  $R_{uv}$  una región compacta y conexa en el plano contenida en un conjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\mathbf{r} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , una función continua con derivadas parciales continuas tal que  $\mathbf{r}$  es invertible en el

interior de  $R_{uv}$  y  $J(u, v) = \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$  es no nulo en el interior de  $R_{uv}$ . Sea  $R_{xy} = \mathbf{r}(R_{uv})$  y  $f : R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces,

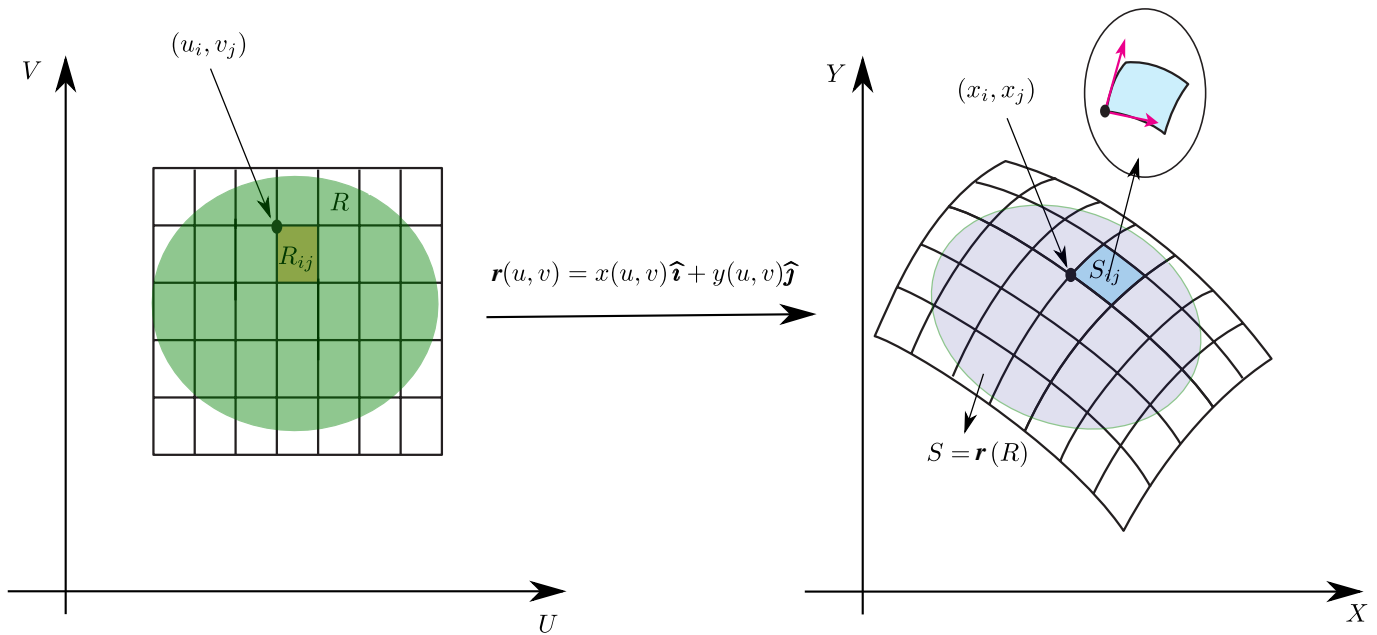
$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

**Notas.** Observe que el Jacobiano  $J(u, v)$  va en valor absoluto dentro de la integral. Además solo se requiere que  $\mathbf{r}(u, v)$  sea invertible en el interior de  $R_{uv}$  y por tanto  $|J(u, v)|$  no se anule en el interior de  $R_{uv}$ .

Para verificar que un cambio de variable es invertible en una región uno podría, si se puede, calcular la transformación inversa  $\mathbf{r}^{-1}(x, y)$ . En los ejemplos de este libro es sencillo calcular esta inversa. El 'Teorema de la Función Inversa' solo dice, con las hipótesis respectivas, que si  $J(u_0, v_0)$  no se anula, entonces  $\mathbf{r}(u, v)$  es invertible en un entorno de  $(u_0, v_0)$ , pero no nos da información de si hay una inversa 'global'. Sin embargo en la literatura se encuentran teoremas con condiciones especiales para 'globalizar' el resultado.

**Idea geométrica.** Consideremos el cambio de variable  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  que transforma  $R$  en  $S$  y que cumplen las condiciones del teorema. Este cambio de variable define una función invertible  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \hat{i} + y(u, v) \hat{j}$  en el

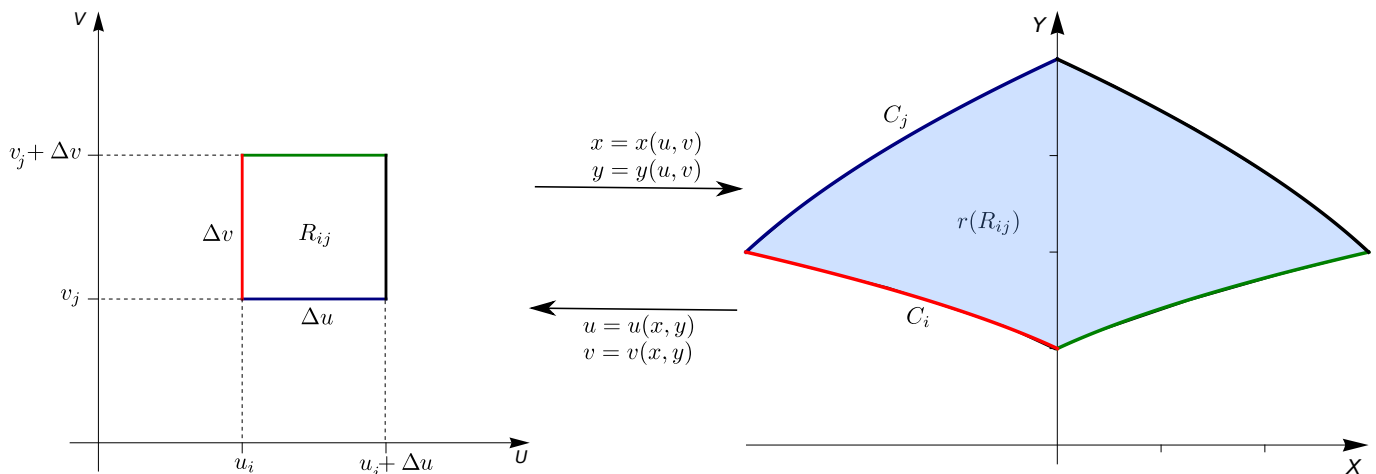
interior de  $S$  y  $S = \mathbf{r}(R)$ .



**Figura 5.25:** Cambio de variable

Tomemos un rectángulo  $R_{ij}$  de una malla  $M$  de  $R$ .  $\mathbf{r}$  transforma el lado  $u = u_i$  en la curva  $C_i : \mathbf{r}(u_i, v), v \in [v_j, v_j + \Delta v]$  y el lado  $v = v_j$  en la curva  $C_j : \mathbf{r}(u, v_j), u \in [u_i, u_i + \Delta u]$ .

Si además  $\mathbf{r}^{-1}$  es continua,  $\mathbf{r}$  es un homeomorfismo y la frontera del rectángulo  $R_{ij}$  es 'mapeada' en la frontera de  $S = \mathbf{r}(R_{ij})$  y el interior en el interior.



**Figura 5.26:** Cambio de variable

Si  $\mathbf{r}(u_i, v_j) = (x_i, y_j)$ , un vector tangente en  $(x_i, y_j)$  en  $C_i$  es  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j}$ . Como este vector representa la velocidad

a la que se desplaza el punto  $\mathbf{r}(u_i, v)$  cuando  $v$  va de  $v_j$  a  $v_j + \Delta v$ , entonces en la curva  $C_i$ ,  $(x_i, y_j)$  se desplaza, en el tiempo  $\Delta v$ , una distancia aproximada  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \Delta v$ . Usando el teorema del valor medio para derivadas lo diáramos así,

$$\mathbf{r}(u_i, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u_i, v) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$$

Análogamente, un vector tangente en  $(x_i, y_j)$  en  $C_j$  es  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i}$ . Como este vector representa la velocidad a la que se desplaza el punto  $\mathbf{r}(u, v_j)$  cuando  $u$  va de  $u_i$  a  $u_i + \Delta u$ , entonces en la curva  $C_j$ ,  $(x_i, y_j)$  se desplaza, en el tiempo  $\Delta u$ , una distancia aproximada  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u$ .

Por tanto, el rectángulo  $R_{ij}$  en  $R$ , se transforma en una porción del plano  $XY$  que es casi el paralelogramo de lados  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \Delta v$  y  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u$ . El área de este paralelogramo es, en términos de producto vectorial,

$$\left| \left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \times \left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u \Delta v \right|$$

En la figura que sigue se ilustra esta situación con un punto genérico  $(u, v)$ .

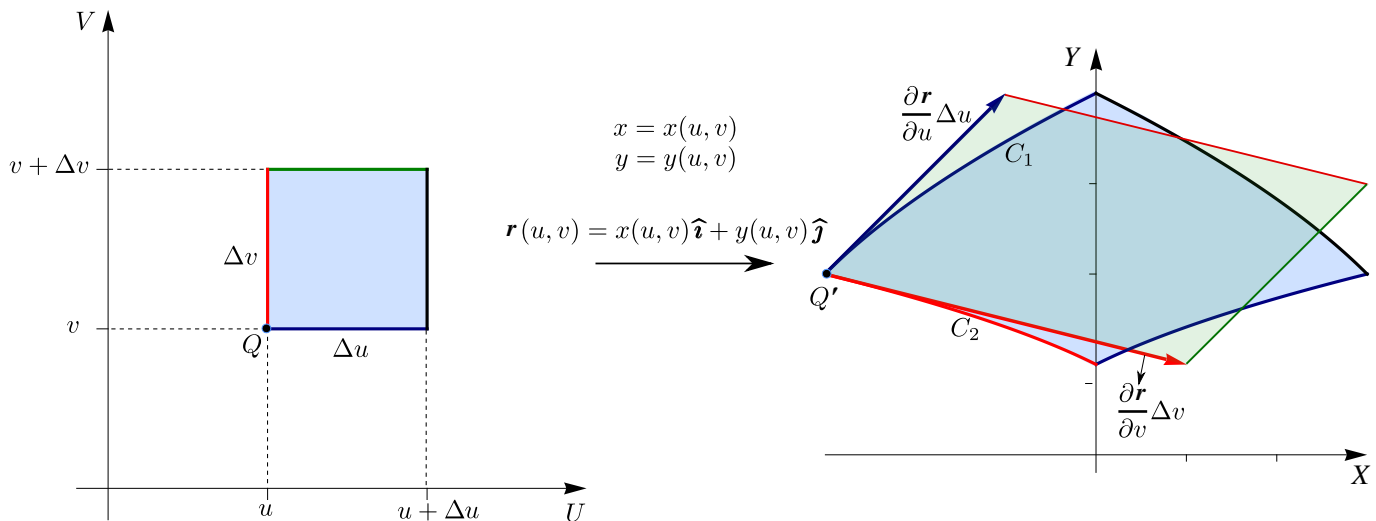


Figura 5.27: Cambio de variable

El área del paralelogramo “curvilíneo” es aproximadamente el área del paralelogramo de lados  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$ . El área de este último paralelogramo es

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = |J(u, v)| \hat{k}$$

De esta manera, si  $J(u, v) = 1$ , el cambio de variable conserva las áreas. Sino, el área de cada paralelogramo en  $XY$  es aproximadamente el área de cada rectángulo en  $UV$ , multiplicada por  $|J(u, v)|$ . Por eso decimos que  $|J(u, v)|$  opera como un factor de compensación por la 'deformación' sufrida por la región ante un cambio de variable. Si la integral existe, deberíamos tener

$$A_S = \iint_S 1 \, dx \, dy \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{S_{ij}} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |J(u, v)|_{u=u_i, v=v_j} \Delta u \Delta v = \iint_R |J(u, v)| \, du \, dv$$

Y en general,

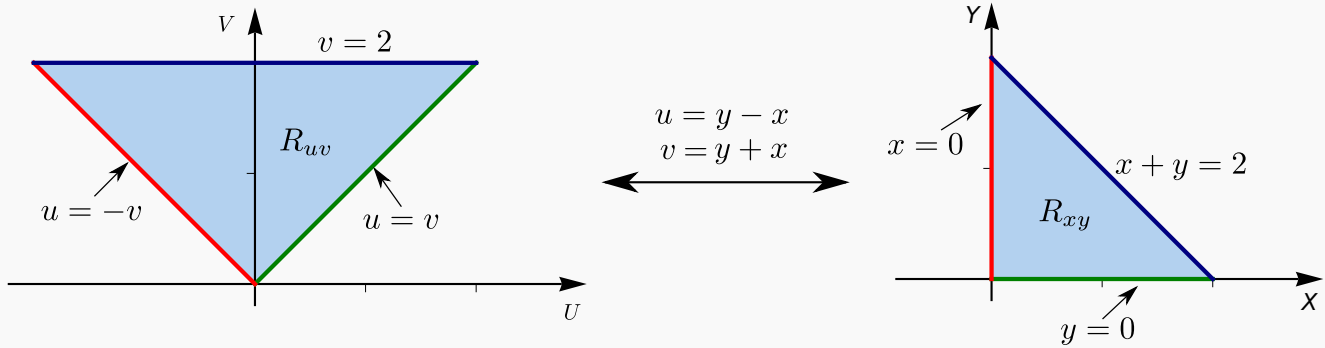
$$A_S = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) A_{S_{ij}} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) |J(u, v)|_{u=u_i, v=v_j} \Delta u \Delta v = \iint_R f(u, v) |J(u, v)| \, du \, dv$$

### Ejemplo 5.8

Calcular  $\iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dA$  usando el cambio de variable  $u = y - x$  y  $v = y + x$ . La región  $R_{xy}$  está limitada por las rectas  $x + y = 2$ ,  $x = 0$  y  $y = 0$ .

**Solución:** . Primero debemos dibujar las región de integración  $R_{uv}$  para luego integrar.

**Nueva región de integración.** El cambio de variable es invertible y la inversa es continua, entonces aplicamos el cambio de variable a la frontera de la región  $R_{xy}$  para calcular las curvas frontera de la región  $R_{uv}$ . Como  $v = y + x$ , el segmento de recta  $x + y = 2$  corresponde a  $v = 2$ . Si  $x = 0$  entonces  $u = v$  y si  $y = 0$  entonces  $u = -v$ .



El cambio de variable es invertible: Resolviendo  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$  obtenemos  $x = \frac{1}{2}(v - u)$  y  $y = \frac{1}{2}(v + u)$ .

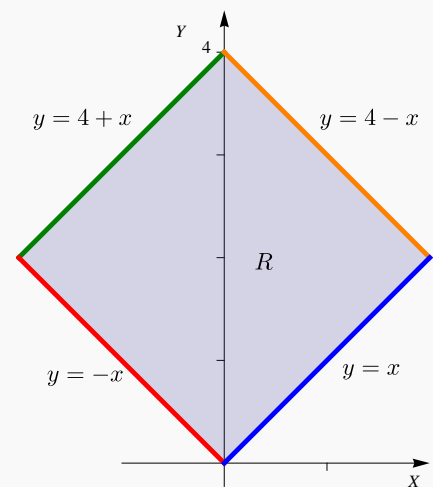
Calculamos el Jacobiano.  $J(u, v) = \text{Det} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -1/2$ .

Cálculo de la integral.  $\iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}} dA = \iint_{R_{uv}} e^{\frac{u}{v}} |J(u, v)| du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv = e - \frac{1}{e}$ .

### Ejemplo 5.9

Calcule  $\iint_{R_{xy}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA$ , donde  $R_{xy}$  es la región mostrada en

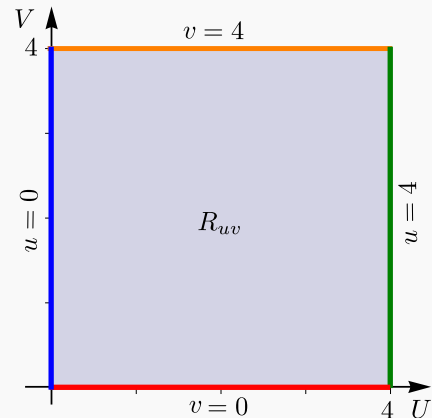
la figura. Utilice el cambio de variable  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$



**Solución:** Si  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$  Entonces  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u) \\ y = \frac{1}{2}(u + v) \end{cases}$

Como la inversa es continua, aplicando el cambio de variable a la frontera de  $R_{xy}$ , obtenemos la frontera de la región  $R_{uv}$ . A  $y = -x + 4$  le corresponde, sustituyendo  $x$  e  $y$ ,  $v = 4$ . A  $y = -x$  le corresponde  $v = 0$  y a  $y = x + 4$  le corresponde  $u = 4$ . La nueva región es más simple.

$$\iint_{R_{xy}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA = \int_0^4 \int_0^4 uve^{v^2} dv du = 4 \cdot e^{16} - 4.$$



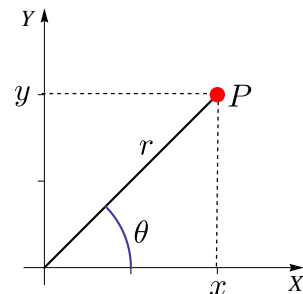
Como se ve en los ejemplos anteriores, en la práctica se usa el cambio de variable en la forma  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  tanto como  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Siempre hay que estar al tanto de que se cumplan las hipótesis, en particular la invertibilidad.

### Caso de Coordenadas Polares.

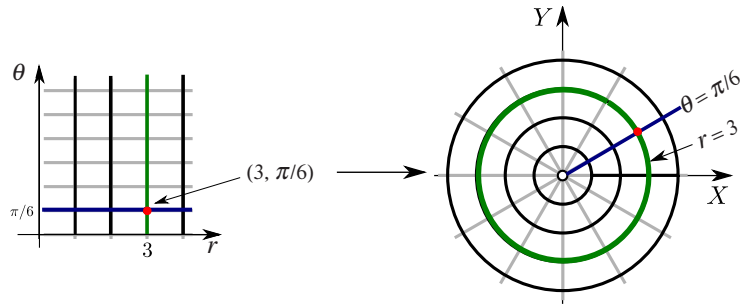
Este cambio de variable es muy útil cuando la región de integración tiene fronteras a lo largo de las cuales  $r$  y  $\theta$  son constantes (como en círculos centrados en el origen). Primero un pequeño repaso.

Un punto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  se puede especificar en **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  donde  $r$  es la distancia del origen a  $P$  y  $\theta$  es el ángulo medido desde el eje  $X$  contrareloj. La conversión de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se hace con la transformación

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (*)$$



Para efectos de cambio de variable, esta transformación es invertible si  $r > 0$  y si  $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ . Podemos definir la inversa desde  $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$  a  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\theta$  el único ángulo  $\theta \in [0, 2\pi[$  que satisface (\*), es decir  $\theta = \arctan(y/x)$  si  $x > 0$  y  $\theta = \arctan(y/x) + \pi$  si  $x < 0$  pues  $\arctan(t)$  está definida en  $] -\pi/2, \pi/2[$  (si  $r = 0$ , el cambio de variable aplica todo el eje  $\theta$  en el origen  $(0,0)$ .)



Poniendo  $u = r$  y  $v = \theta$  tenemos el cambio de variable,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

En este caso,

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

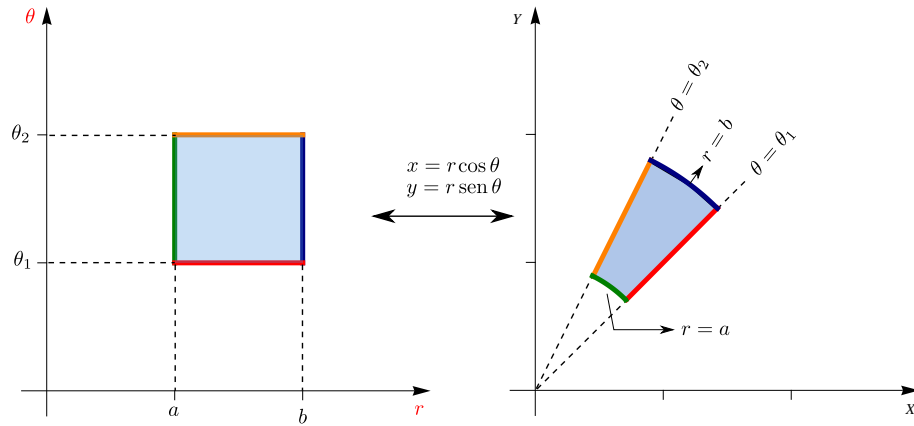


Figura 5.28:  $R$

Como ya indicamos, este cambio de variable es invertible si  $r > 0$  y si  $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$  (a veces es cómodo tomar ángulos negativos).

Si en  $R$  y  $R'$  se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable, entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

- En el caso de coordenadas polares, la nueva región  $R_{r\theta}$  se puede describir en el mismo sistema  $XY$ .
- Si una región  $R$  se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 < \varphi_0(\theta) \leq r \leq \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

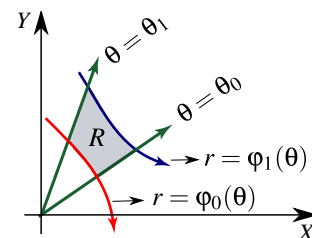


Figura 5.29:  $R$



- Si una región  $R$  se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 \leq r \leq \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{\varphi_1(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

**Nota.** En este caso, el cambio de variable es invertible en el interior de

la región ( $r > 0$ ) y además aquí el Jacobiano no se anula, así que no afecta que  $r = 0$ .

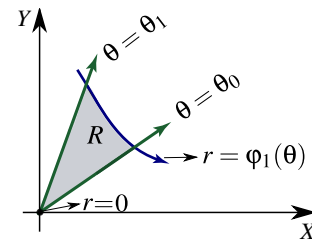


Figura 5.30:  $R$

### Ejemplo 5.10

Calcular el área  $A_c$  del círculo de radio  $a$ .

**Solución:** Para este cálculo podemos usar un círculo de radio  $a$ , centrado en el origen. La circunferencia del círculo tiene ecuación cartesiana  $x^2 + y^2 = a^2$ . Para obtener la ecuación en polares, sustituimos  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  y despejamos  $r$ :

$$x^2 + y^2 = a^2 \implies (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2 \implies r^2 = a^2.$$

Así, en coordenadas polares, la región de integración va desde  $r = 0$  hasta  $r = a$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

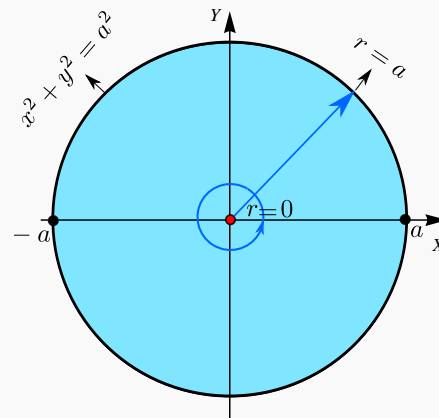


Figura 5.31: Círculo de radio  $R$ .

$$A_c = \iint_R 1 \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \frac{a^2}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2$$

### Ejemplo 5.11

Considere la región  $R$  de la figura. Para calcular el área  $A_R$  de la región  $R$ , usando coordenadas polares, debemos hacer el cambio de variable  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ .

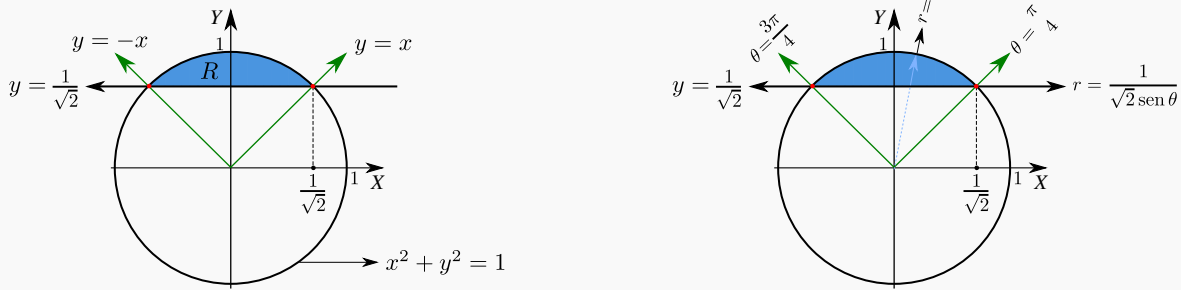


Figura 5.32: Región  $R$  en coordenadas rectangulares y polares.

Observe que

- La recta  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  se transforma en  $r \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\theta)}$ .
- La circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  se transforma en  $r = 1$ .
- La recta  $y = x$  se transforma en  $\theta = \pi/4$ . En efecto,  $y = x \Rightarrow \cos \theta = \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \theta = \pi/4$ . Esto, por supuesto, también lo podemos establecer de manera geométrica.

$$\begin{aligned} A_R &= \iint_R 1 \cdot dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\theta)}}^1 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\theta)}}^1 d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{csc}^2(\theta) d\theta = \left. \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cot(\theta) \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi - 2}{4} \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.12

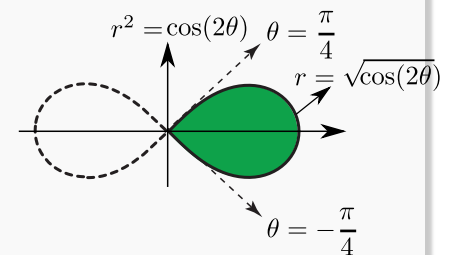
Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ ,  $x \geq 0$  (región verde en la figura).

**Solución:** Haciendo el cambio de variable  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \operatorname{sen} \theta$  y sustituyendo en  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ , obtenemos

$$(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta))^2 - r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = 0$$

Simplificando queda  $r^2 = \cos(2\theta)$ , que es la ecuación de la lemniscata.

Como  $x \geq 0$  entonces la mitad de la lemniscata que nos interesa es  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ . Las tangentes al polo son  $\theta = -\pi/4$  y  $\theta = \pi/4$ .

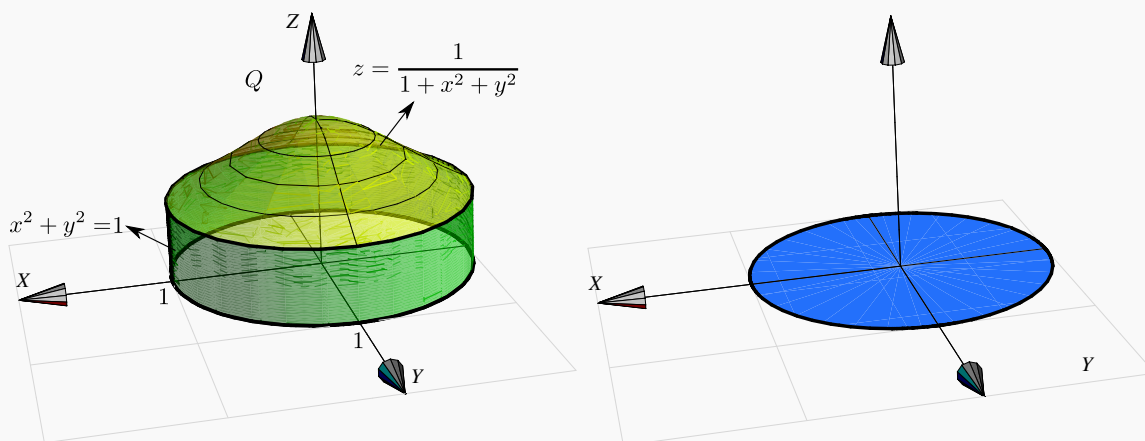


Luego, el área de la región es  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r \, dr \, d\theta = 1/2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta) \, d\theta = 1/2$ .

**Ejemplo 5.13**

Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ ,  $x^2+y^2=1$  y  $z=0$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 5.33:** Sólido  $Q$  y su proyección sobre  $xy$ .

**Solución:**

El sólido y su proyección sobre el plano  $XY$  se ven en la figura. El sólido  $Q$  está limitado por  $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  y  $z=0$ . Aplicando coordenadas polares (y como no hay singularidades) tenemos

$$V_Q = \iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(2) d\theta = \pi \ln(2)$$

**Ejemplo 5.14**

Plantear una integral, en polares, para calcular el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = \frac{y}{x^2+4}$ ,  $x^2+y^2=4$  y  $z=0$  con  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ .

**Solución:** El sólido y su proyección sobre el plano  $XY$  se ven en la figura.

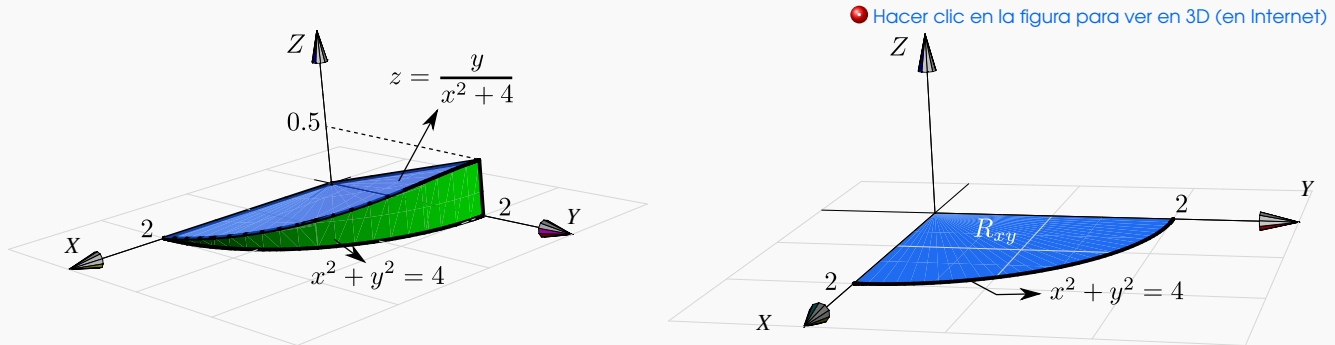


Figura 5.34: Sólido Q y su proyección sobre  $xy$ .

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$V_Q = \iint_R \left( \frac{y}{x^2 + 4} - 0 \right) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{r \operatorname{sen}(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} r dr d\theta$$

**Nota:** Esta última integral se puede calcular observando que

- $\int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2} (-x + (1 + x^2) \arctan x)$ , salvo constantes.

- $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 f(r, \theta) dr d\theta = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} f(r, \theta) d\theta dr$ , pues estamos integrando sobre un rectángulo.

Veamos,

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R \frac{y}{x^2 + 4} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} dr d\theta \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} d\theta dr = \int_0^2 \int_0^1 \frac{r^2}{4 + r^2 u^2} du dr, \text{ (haciendo } u = \cos \theta). \\ &= \int_0^2 \int_0^1 \frac{r}{2} \frac{r/2}{1 + (ru/2)^2} du dr = \int_0^2 \frac{r}{2} \arctan(ru/2) \Big|_0^1 dr = \int_0^2 \frac{r}{2} \arctan(r/2) dr \\ &= 2 \int_0^1 x \arctan(x) dx = \frac{1}{2}(\pi - 2). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.15**

Calcule  $\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA$  si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Solución:** La región  $R$  es la parte del círculo de radio 1, centrado en el origen, que está en el primer octante. Aquí usamos el hecho de que  $\int_a^b \int_p^q f(\theta)g(r) dr d\theta = \int_a^b f(\theta) d\theta \cdot \int_p^q g(r) dr$ .

$$\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{(1+r^2)^2} dr d\theta$$

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{4r^3 + 4r}{1+2r^2+r^4} dr - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2r}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{8} \ln|1+2r^2+r^4| \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1+r^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \ln 4 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**20****Ejercicios**

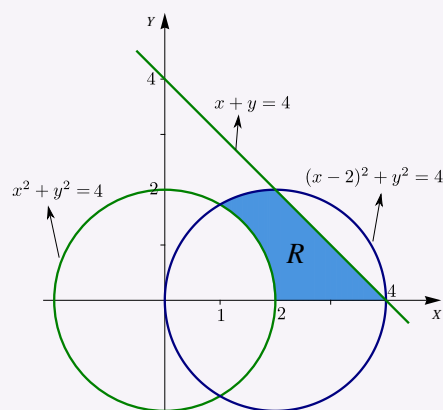
**5.7** Usando el cambio de variable  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ ; calcular  $I = \iint_T xy dA$  donde  $T$  es el rectángulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$  y  $(1, 3)$ .

**5.8** Calcule  $\iint_T e^{(x+y)/(x-y)} dA$  usando el cambio de variable  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ ; donde  $T$  es el trapecio de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, -2)$  y  $(0, -1)$ .

**5.9** Calcule  $\iint_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$  donde  $T$  es el trapecio de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(0, 1)$ . **Ayuda:** Usar cambio de variable  $u = y - x$ ,  $v = y + x$ .

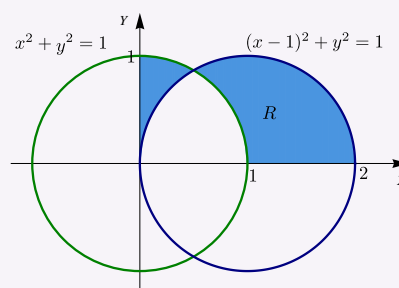
**5.10** Calcule  $\iint_T xy dA$  donde  $T$  es la región limitada por  $y = x$ ,  $y = 3x$ ,  $xy = 1$  y  $xy = 3$ ; en el primer cuadrante. Use el cambio de variable  $x = u/v$  y  $y = v$ .

**5.11 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular  $\iint_R \frac{dA}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dA$ . La región  $R$  es la región limitada por los círculos  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  y las rectas  $x + y = 4$ ,  $y = 0$ , como se muestra en la figura.



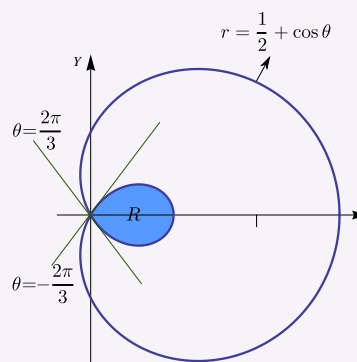
**Figura 5.35:** Región  $R$

**5.12 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el área de la región  $R$  limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$  y  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

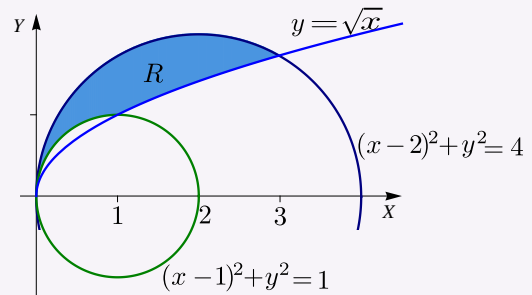


**Figura 5.36:** Región  $R$

**5.13** Calcular el área de la región limitada por el lazo de la curva  $r = 1/2 + \cos\theta$ . **Ayuda:** Notar que el lazo tiene ecuación  $r = 1/2 + \cos\theta$ ,  $2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$ .

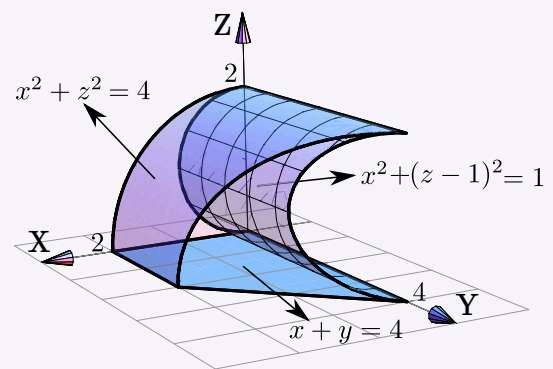


**5.14** Utilizando coordenadas polares, plantear la o las integrales que permiten calcular el área de la región  $R$  (región sombreada) mostrada en la figura.



**Figura 5.37:** Región  $R$

**5.15** Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 + (z-1)^2 = 1$  y  $x = 4 - y$ , en el primer octante; como se muestra en la figura. Ayuda: Proyectar sobre  $XZ$  y usar coordenadas polares.



## 5.5 Integral triple.

Consideremos un cubo  $Q$  como el de la figura a la derecha. Su volumen es  $V_Q = abc$ . Si la densidad  $\rho$  es constante en todo el cubo, la masa viene dada por

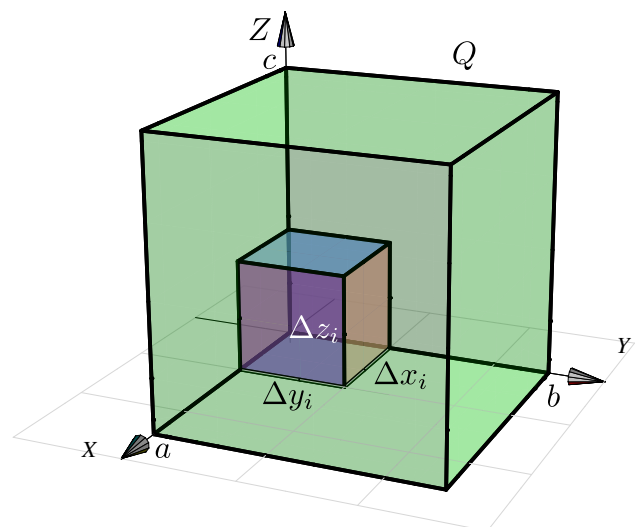
$$M_Q = \rho V_Q$$

Si la densidad no es constante y  $\rho = \rho(x, y, z)$ , entonces para obtener una aproximación de la masa, dividimos  $Q$  en  $N$  cubos  $Q_i$  de volumen

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Así, la densidad en el punto  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  es

$$\Delta M_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$



**Figura 5.38**